МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О.Є. Скворчевський

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЦІ І МЕНЕДЖМЕНТІ

Текст лекцій

курсу «Економіко-математичні методи та моделі»

для студентів спеціальностей 6.030601 – «Менеджмент організацій», 6.030504 – «Економіка підприємства», 6.030507 – «Маркетинг», 6.030505 – «Управління персоналом та економіка праці», 6.030507 – «Інтелектуальна власність», 6.030509 – «Облік та аудит» очної, заочної та дистанційної форм навчання

Харків
НТУ «ХПІ»
2014

УДК 005.311.12.519.863(076.5)
ББК 65.050.03я73

Скворчевський О.Є.

С 42 Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті : текст лекцій з курсу «Економіко-математичні методи та моделі» / О.Є. Скворчевський. – Харків : НТУ «ХПІ», 2014. – 76 с.

Текст лекцій «Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті» містить лекції за основними розділами відповідного циклу з курсу «Економіко-математичні методи і моделі». У виданні висвітлені основні теми даного курсу. При підготовці тексту лекцій використовувались провідні вітчизняні та зарубіжні підручники, а також наукові публікації автора.

Призначено для студентів, що навчаються за спеціальностями економічного та менеджерського профілю, викладачів та інженерно-технічних працівників ВНЗ, спеціалістів.

Іл. 14. Табл. 4. Бібліогр. 31 назв.

УДК 005.311.12:519.863(076.5)
ББК 65.050.03я73

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ СКОРОЧЕНЬ

ЕММ – економіко-математичне моделювання;
ЕМММ – економіко-математичні методи і моделі;
ЕОМ – електронно-обчислювальна машина;
МГБ – міжгалузевий баланс;
МП – математичне програмування;
КО – критерій оптимальності;
ЦФ – цільова функція;
КЗ – керовані змінні;
ОДЗ – область допустимих значень;
ОМ – оптимізаційна модель;
ЛП – лінійне програмування;
НП – нелінійне програмування;
ДП – динамічне програмування;
СП – стохастичне програмування;
ПП – параметричне програмування;
Дис.П – дискретне програмування;
ЦП – цілочисленне програмування;
ЦК – цільовий коефіцієнт;
ПЧО – права частина обмеження;
ПЗ – пряма задача;
ДЗ – двоїста задача;
НВ – нормована вартість;
ТЦ – тіньова ціна;
ВПП – виробнича програма підприємства;
ТЗ – транспортна задача;

ВСТУП

Сучасна економічна наука стає все більш математизованою дисципліною. Із часу заснування Нобелівської премії з економіки 1969 року більшість премій надається саме за досягнення у галузі економіко-математичних досліджень. Як приклад можна навести Нобелівські премії, які одержали Рагнар Фріш та Ян Тінберген (1969), Васіль Леонтьев (1973), Лєонід Канторович та Тьялінг Купманс (1975), Лоуренс Клейн (1980), Трюгве Хаавельмо (1989), Джон Харсаньі, Джон Неш та Райнхард Зелтен (1994), Джеімс Хекман та Денієл Макфаден (2000), Роберт Ігл (2003), Клайв Гренджер (2003), Роберт Ауман та Томас Шелінг (2005), Леонід Гурвіч, Ерік Мескін, Роджер Майєрсон (2007). Таке широке застосування математичних методів в економіці може бути пояснено двома основними причинами: з одного боку, це значне ускладнення економічних явищ та процесів, а з іншого – бурхливий розвиток прикладної математики та комп'ютерної техніки. Таким чином, незважаючи на складність економіки, пов'язану в першу чергу із значною кількістю одночасно та сукупно діючих факторів, серед яких є і випадкові, сучасні економіко-математичні методи та моделі дозволяють досить адекватно досліджувати реальні економічні явища та процеси.

Одним із найважливіших напрямків економіко-математичного моделювання є оптимізаційні методи і моделі. Вивчення цього напрямку економіко-математичних методів і моделей є невід'ємною частиною базової підготовки економістів, менеджерів, маркетологів. Глибокі знання оптимізаційних методів і моделей необхідні для успішного засвоєння курсів «Методи прийняття управлінських рішень», «Логістика» та ін. Також важливість цього курсу полягає не тільки у вивченні сучасних комп'ютерних методів математичного моделювання в економіці, але і у формуванні чіткості, ясності та дисципліни мислення у студентів.

Текст лекцій призначено для фахівців із загальною економічною підготовкою, тому автор ставив за мету викласти як теоретичні основи, так і практичні підходи до комп'ютерного моделювання в економіці, менеджменті та маркетингу. Теоретичні аспекти викладені в такому обсязі та під таким кутом, щоб була зрозуміла сутність алгоритму роботи того чи іншого програмного продукту, що пропонується для рішення прикладних економічних задач. Глибоке засвоєння теоретичного матеріалу студентами, дозволить майбутнім фахівцям вирішувати не тільки прикладні задачі викладені у посібнику, але і широке коло їх модифікацій, що може зустрітися на практиці.

Необхідно висловити подяку п'яти поколінням студентів яким читаються курси «Економіко-математичні методи і моделі», «Математичне моделювання в економіці і менеджменті». Постійна, жива, активна взаємодія із студентами та корегування лекційної та лабораторної частини курсу так, щоб він був максимально доступним для їх розуміння, не спрощуючи при цьому матеріал, дозволило створити цей навчальний посібник. Зрозуміло, що сучасне економіко-математичне моделювання, в тому числі оптимізаційні методи і моделі, розрослися настільки, що в рамках одного навчального семестру можливо розглянути лише їх базові поняття та розділи. Будемо вдячні за усі конструктивні зауваження, щодо стилю викладення матеріалу та змісту видання.

При вивченні курсу «Оптимізаційні методи та моделі» необхідно розуміти, що управлінські рішення, отримані за допомогою математичного моделювання, можуть носити лише рекомендований характер. Це пов'язано із складністю економічних явищ та процесів, впливом випадкових факторів, які часто неможливо передбачити. Але ж не можна не погодитись зі словами відомого американського фахівця у галузі дослідження операцій Т. Сааті, який характеризує застосування математичних методів в економіці як «мистецтво давати погані відповіді на ті практичні питання, на які даються ще гірші відповіді іншими способами».

ТЕМА 1. КОНЦЕПТУАЛЬНІ ЗАСАДИ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1.1. Сутність процесу моделювання

Багато об'єктів дослідження (явищ, процесів тощо) безпосередньо досліджувати або зовсім неможливо, або це дослідження вимагає багато часу і засобів. В таких випадках доцільно використовувати певні об'єкти-заступники, створені суб’єктом дослідження як інструмент пізнання, за допомогою якого вивчається об'єкт дослідження. Очевидно, що створені об'єкти-заступники не будуть повністю відповідати об'єктам-оригіналам. Це зумовлено відображенням тільки суттєвих, із точки зору суб’єктів досліджень, властивостей об’єктів-оригіналів, а також може бути спричинено відсутністю повної та достовірної інформації про їх властивості. Створені об’єкти-заступники отримали назву моделей.

Модель – об’єкт будь-якої природи, котрий створюється суб’єктом досліджень із метою отримання нових знань про об’єкт досліджень та відображає тільки суттєві, з точки зору суб’єкта досліджень, властивості об’єкта досліджень.

Моделювання – процес опосередкованого пізнання об’єкта досліджень, шляхом побудови, вивчення та застосування його моделей.

Часто вивчення одних сторін об'єкту моделювання здійснюється ціною відмови від віддзеркалення інших сторін. Тому будь-яка модель заміщає оригінал лише в обмеженому сенсі. З цього виходить, що для одного об'єкту може бути побудовано декілька моделей, що концентрують увагу на певних сторонах об'єкту моделювання чи ж що характеризують його із різним ступенем деталізації.

Важливою характеристикою моделі є її відповідність модельованому явищу чи процесу. Ступінь цієї відповідності буде значною мірою визначати теоретико-пізнавальну та практичну цінність моделі, можливість достовірного прогнозування, планування та прийняття управлінських рішень на її базі. Якщо модель із достатнім ступенем точності відображає важливі для суб’єкта досліджень властивості об’єкта-оригінала, то кажуть, що вона **адекватна об’єкту моделювання**.

На рис. 1.1 зроблена спроба схематично відобразити процес побудови моделі деякого об’єкту.

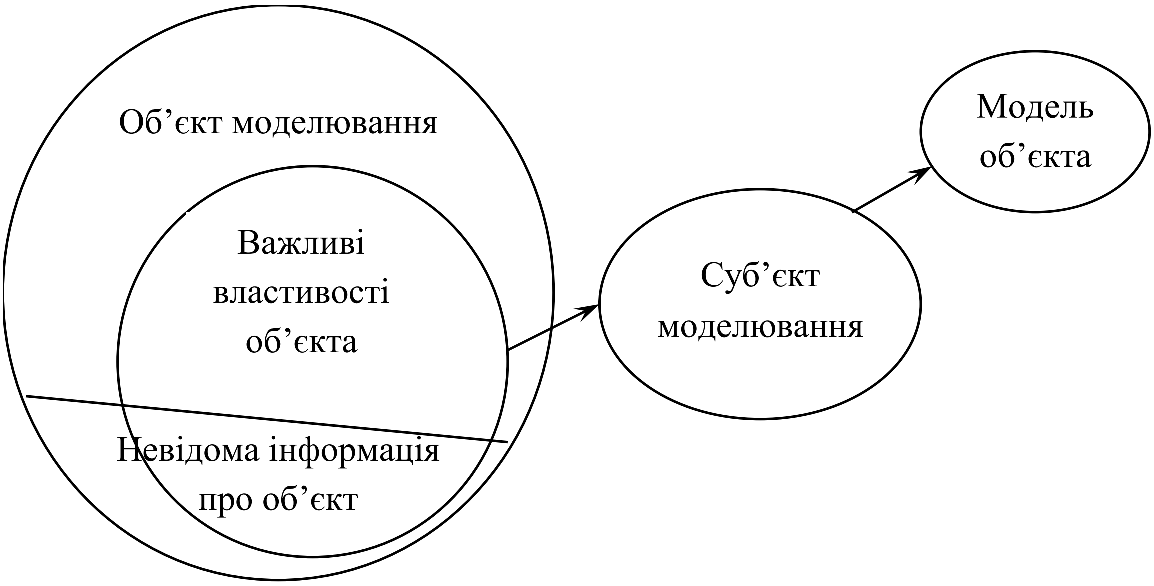


Рисунок 1.1 – Схематичне відображення процесу побудови моделі об'єкта

1.2. Особливості моделювання економічних явищ та процесів

Курс економіко-математичне моделювання (ЕММ) входить до базової економічної підготовки та містить у собі розділи прикладної математики необхідні майбутнім спеціалістам для прийняття науково обґрунтованих управлінських рішень, проведення маркетингових досліджень, прогнозування та планування розвитку економічних об'єктів різного рівня. На сучасному етапі проведення прикладних економіко-математичних досліджень складно собі уявити без застосування комп'ютерної техніки та сучасних програмних засобів, наприклад MathCAD, Microsoft Excel та ін. Курс ЕММ складається із декількох частин, які значною мірою є незалежними одна від одної (рис. 1.2).

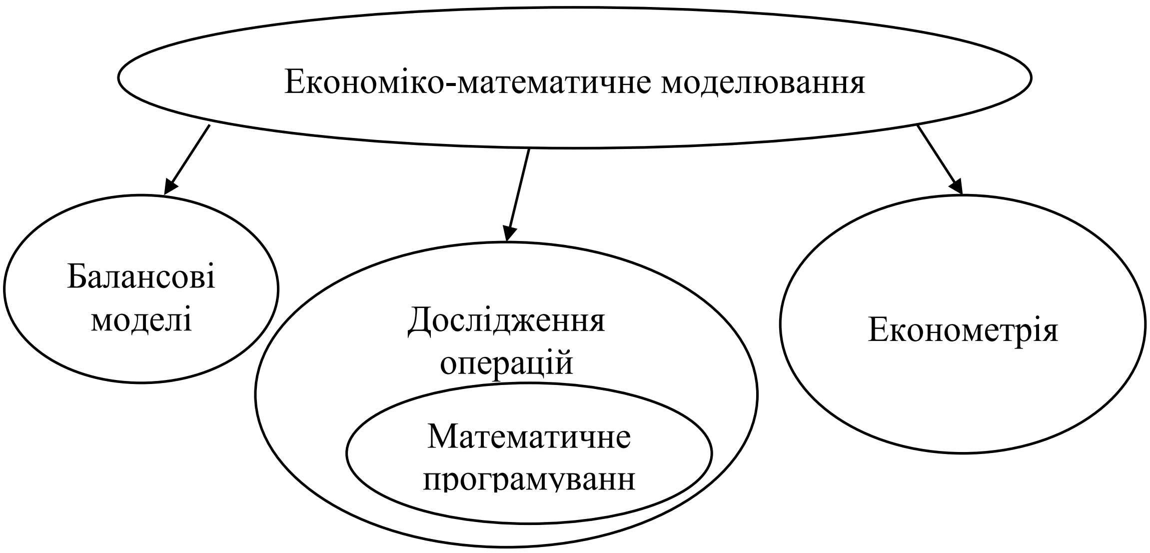


Рисунок 1.2 – Структура курсу ЕММ

Як бачимо даний курс в основному складається із двох частин (дослідження операцій та економетрія), які значною мірою є незалежними одна від одної. В більшості закордонних та вітчизняних підручників прикладні аспекти математичного програмування відносяться до дисципліни дослідження операцій.

В п. 1.1 ми визначили сутність моделі взагалі. Дамо визначення понять математичної та економіко-математичної моделі.

Математична модель – модель в якій властивості об'єкта моделювання відображаються за допомогою мови математики: рівнянь, нерівностей, графіків, логічних співвідношень тощо.

Економіко-математична модель – модель економічного явища чи процесу побудована за допомогою мови математики та має на меті рішення однієї чи декількох із наступних задач: аналіз певних положень економічної теорії; планування в економіці й прийняття науково обґрунтованих управлінських рішень; обробка і приведення в систему емпіричних даних; прогнозування розвитку економічних явищ і процесів на макро- чи макрорівнях та ін.

Створення адекватної економіко-математичної моделі є складною науково-практичною задачею. Це викликано рядом причин, основні із яких перелічимо нижче:

- ✓ наявність випадкових складових в економіці, наприклад соціальні, політичні фактори, вплив погодних умов на окремі сектори економіки (сільське господарство, туризм, авіаперевезення тощо);
- ✓ наявність значної кількості суб'єктів економіки із різними цілями та зацікавленостями;
- ✓ неповнота та неточність інформації про об'єкт моделювання, пов'язана із обмеженістю можливостей її збору і обробки;
- ✓ висока складність економічних систем та ін.

Розглянемо більш детально поняття система із точки зору **кібернетики**, як науки про найбільш універсальні закони управління в техніці, економіці, соціумі, живих об'єктах та **системного аналізу**, як методології дослідження об'єктів шляхом представлення їх у якості систем і аналізу цих систем.

Система – множина m елементів на котрому реалізуються відношення R та яка має властивості P, причому ці властивості не характерні для відділених одне від одного елементів системи.

Емерджентність – наявність таких властивостей системи, що складається із m елементів, які не характерні для цих елементів відокремлених один від одного.

Системи можна класифікувати за наявністю випадкових чинників.

Детерміновані системи – системи виходи котрих (результати дії, кінцеві стани и т.д.) однозначно визначаються управляючою дією.

Стохастичні системи – системи виходи котрих не однозначно визначаються вхідною управляючою дією, через наявність випадкових чинників. Економічні системи в основному відносяться до стохастичних систем.

Від такої класифікації систем зручно перейти до класифікації моделей, які їх описують.

Детермінована модель – математичне представлення явища чи процесу, для котрого при деякій даній сукупності вхідних значень може бути отримані конкретний результат на виході моделі.

Детермінована модель може відображати функціонування детермінованої системи чи стохастичної системи. У другому випадку реальні явища та процеси спрощуються, що робить модель більш зручною для розрахунків, але менш адекватною процесу.

Стохастична модель – математичне представлення явища чи процесу, для котрого при деякій даній сукупності вхідних значень може бути отримано декілька різних результатів на виході моделі. Така властивість стохастичних моделей пояснюється урахуванням у ній випадкових чинників стохастичних систем.

По цільовому призначенню моделі поділяються на:

Дескриптивна модель – модель призначена для опису та пояснення спостерігаємих явищ та процесів, а також для прогнозування, як правило короткострокового.

Нормативна модель – модель призначена для знаходження деякого бажаного (наприклад оптимального), з точки зору суб’єкта моделювання, стану об’єкта, процесу, явища.

Чи є економіко-математична модель дескриптивною або нормативною, залежить не тільки від її математичної структури, але від характеру використання цієї моделі. Наприклад, якщо модель використовується для аналізу даних минулого періоду, вона дескриптивна. Але ця ж математична модель стає нормативною, коли вона застосовується для розрахунків певних показників на майбутні періоди. Багато економіко-математичних моделей поєднують ознаки дескриптивних і нормативних моделей. Типова ситуація, коли нормативна модель складної структури об'єднує окремі блоки, які є окремими дескриптивними моделями.

Перша частина курсу ЕМММ – дослідження операцій практично повністю присвячено вивченню нормативних моделей. А розділ економетрія в основному вивчає дескриптивні моделі.

Запитання для самостійної перевірки знань:

1. Дати коротке визначення поняттям модель та моделювання.
2. Назвати основні причини через які модель відображає не усі сторони об’єкта моделювання.
3. Розкрити поняття адекватності математичної моделі.
4. Дати коротке визначення поняттям математична та економіко-математична модель.
5. Охарактеризувати основні складності побудови адекватної економіко-математичної моделі.
6. Охарактеризувати поняття система та емерджентіність з точки зору кібернетики.
7. Класифікація систем за наявністю випадкових чинників.
8. Відмінності детермінованих та стохастичних моделей.
9. Відмінності нормативних та дескриптивних моделей.\

Список використаної літератури:

1. Аллен Р. Математическая экономия / Р. Аллен – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 670 с.
2. Математика и кибернетика и экономике. Словарь-справочник. Изд. 2-е перераб. и доп. – М.: Экономика, 1975. – 700 с.
3. Абчук В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций. / В.А. Абчук – СПб.: Союз, 1999. – 273 с.
4. Економіко-математичне моделювання: навчальний посібник / За ред. О.Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
5. Лугінін О.Є. Економіко-математичне моделювання. Навчальний посібник для ВНЗ / О.Є. Лугінін, В.М. Фомішена – К. Знання, 2011. – 342 с.

ТЕМА 2. ПОБУДОВА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ ЛЄОНТЬЄВА

У сучасній економіці утворилися складні взаємозв'язки між окремими галузями. Ефективне ведення національного господарства передбачає наявність балансу між ними. Кожна галузь при цьому виступає подвійно – з одного боку, як виробник деякої продукції, а з іншого – як споживач продукції, що виробляється іншими галузями. Виникає доволі непроста задача розрахунку зв'язків між галузями через випуск та споживання продукції різних видів. Таку задачу вирішив американський економіст В.В. Леонтьев, який у 30-і роки ХХ ст. запропонував економіко-математичну модель міжгалузевого балансу (метод «витрати-випуск»), яка пізніше була названа в його честь.

Модель міжгалузевого балансу (МГБ) – економіко-математична модель, що характеризує міжгалузеві виробничі взаємозв'язки у національній чи регіональній економіці.

Одним із базових понять МГБ є поняття галузі. Розрізняють господарську та технологічну галузі.

Господарська галузь – сукупність підприємств, що характеризуються спільністю основної продукції, технологи її виробництва, основних фондів, професійних навичок працівників. Окрім основного виду продукції, що визначає галузеву приналежність, господарська галузь може виробляти значну кількість так званих непрофільних видів продукції, наявність яких обумовлена комплексним використанням сировини, обслуговуванням основного виробництва, використанням відходів, завантаженням вільних виробничих потужностей і т.п.

На відміну від цього при використанні моделі Леонтьева застосовується поняття чистої або технологічної галузі.

Технологічна галузь – сукупність технологічних процесів по виробництву певних видів продукції незалежно від того, чи є вони профільними або непрофільними на підприємствах, де вони реалізуються.

Продукція одного підприємства може складатися з продуктів різних технологічних галузей. З іншого боку, продукція технологічної галузі може включати продукти, виробленими багатьма господарськими галузями.

МГБ для n галузей є таблицею (табл. 2.1), що відображає зв'язки між об'ємами витрат на виробництво продукції (у галузевому розрізі), з одного боку, і об'ємами вироблюваної галузями продукції, з іншого боку. МГБ може бути розроблений, як у вартісній так і у натуральній формі.

У МГБ зазвичай через i відображають номер виробляючої галузі ($i = 1..n$), тобто номер рядка, а через j – номер споживаючої галузі, тобто номер стовпчика ($j = 1..n$).

Таблиця 2.1 – Модель міжгалузевого балансу

Виробляючі галузі	Споживаючі галузі				Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	y_2	x_2
…	…	…	x_{ij}	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n	x_n
Умовно чиста продукція	z_1	z_2	…	z_n	$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{i=1}^{n} y_i$	
Валовий продукт	x_1	x_2	…	x_n		

Розглянемо показники які використані у табл. 2.1.

$x_{11},\ldots, x_{ij},\ldots,x_{nn}$ – обсяг продукції галузі i, що витрачається в галузі j, тобто ***міжгалузеві постачання***.

Валовий об'єм виробництва продукції галуззю (валове виробництво) i за даний проміжок часу (x_i) визначається за формулою:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \tag{2.1}$$

де y_i – **кінцева продукція**, що включає в себе використання продукції галузі i в домашніх господарствах, державних структурах, збільшення запасів та резервів, відшкодування зношення основних фондів, експорт тощо.

Рівняння (2.1) відображає розподілення продукції галузей.

Об’єм потреб j-ї споживаючої галузі (валове споживання) у продукції i-х галузей та інших факторів виробництва x_j визначається за формулою:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j, \tag{2.2}$$

де z_j – **умовно чиста продукція** – показник, що вимірює продукцію на загальнодержавному рівні, як вироблений національний дохід плюс амортизаційні відрахування у виробничій сфері. На рівні підприємства вона включає в себе прибуток підприємства, оплату праці та амортизацію.

Рівняння (2.2) відображає втрати на виробництво продукції галузей.

Табличну побудову міжгалузевого балансу забезпечує виконання в ньому наступних співвідношень:

1. валова продукція по однойменним рядкам та стовпчикам дорівнює одна одній, тобто $x_i = x_j$ при $i = j$;

2. балансовий характер табл. 2.1 – сума об’ємів умовно-чистої продукції z_j по кожній споживаючій галузі дорівнює сумі об’ємів кінцевої продукції y_i по кожній виробляючій галузі:

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{i=1}^{n} y_i, \tag{2.3}$$

Одним із базових понять міжгалузевого балансу є коефіцієнти прямих матеріальних витрат, які розраховуються за формулою:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}. \tag{2.4}$$

Коефіцієнт прямих матеріальних витрат a_{ij} – міра прямого використання продукції i-ї виробляючої галузі для виробництва одиниці продукції j-ї споживаючої галузі.

Коефіцієнти a_{ij} у натуральному балансі означають технологічні норми витрат продукту i на виробництво одиниці продукту j (наприклад, витрата цукру на банку плодово-ягідних консервів або на кілограм морозива, кіловат-годин електроенергії на тонну вугілля, на один автомобіль і т.д.). у вартісному балансі коефіцієнти a_{ij} означають витрати галузі i на кожну грошову одиницю валової продукції галузі j.

При розрахунках за моделлю Леонтьєва приймається, що $a_{ij} = const$ протягом певного періоду часу. Економічно це обґрунтовується відносною сталістю обладнання, сировини, напівфабрикатів, технологій що використовуються при виробництві. Очевидно, що на практиці $a_{ij} = const$ можна прийняти лише умовно, особливо для країн із розвиненою високотехнологічною економікою. Аналіз динаміки змін коефіцієнтів a_{ij} дозволяє дослідити якісні зміни в економіці: зміну технології виробництва, появу товарів-субститутів тощо.

Враховуючі залежність (2.4) рівняння (2.1) можна записати у вигляді:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + y_i, \qquad (2.5)$$

Якщо розглядати рівняння (2.5) по кожній із n виробляючих галузей отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j + y_1, \\ x_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot x_j + y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + y, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} \cdot x_j + y_n. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Для рішення системи (2.6) зручно перейти до матричних позначень.

Коефіцієнти a_{ij} складають матрицю коефіцієнтів прямих матеріальних витрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.7)$$

Матриця A називається **продуктивною**, якщо при усіх $a_{ij} \geq 0$ сума елементів по будь-якому із її стовпчику (рядку) не більша одиниці $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1$ ($\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1$), причому хоча б для одного стовпчика (рядка) ця сума суворо менше одиниці $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} < 1$ ($\sum_{j=1}^{n} x_{ij} < 1$). Існують також інші способи перевірки матриці A на продуктивність. Економічний сенс продуктивності матриці A полягає у тому, що економіка має бути рентабельною. Коефіцієнти та матрицю прямих матеріальних витрат називають також, технологічними коефіцієнтами та матрицею.

Також запишемо інші матричні позначення:

$$XI = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (2.8) \qquad XJ = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (2.9) \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

де XI – вектор валової продукції виробляючих галузей; XJ – вектор валової продукції споживаючих галузей; Y – вектор кінцевої продукції.

Враховуючі позначення (2.7)-(2.10) запишемо систему (2.6) у матричній формі:

$$XI = A \cdot XJ + Y. \qquad (2.11)$$

Розмірність матриць XI та XJ однакова та $x_i = x_j$ при $i = j$, тому $XI = XJ$. Позначимо вектори XI та XJ через X та запишемо рівняння (2.11) у вигляді:

$$X = A \cdot X + Y. \tag{2.12}$$

Із (2.12) отримаємо:

$$Y = E \cdot X - A \cdot X. \tag{2.13}$$

де E – одинична матриця розмірності n.

Так отримаємо рівняння для визначення вектору кінцевої продукції:

$$Y = (E - A) \cdot X. \tag{2.14}$$

Вектор валової продукції визначається за формулою:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y. \tag{2.15}$$

В теорії міжгалузевого балансу показано, що $(E - A)^{-1}$ є <u>матрицею коефіцієнтів повних матеріальних витрат</u>, яка зазвичай позначається як B:

$$B = (E - A)^{-1}. \tag{2.16}$$

Коефіцієнти повних матеріальних витрат b_{ij} – міра прямого і опосередкованого використання продукції i-ї виробляючої галузі для виробництва одиниці кінцевої продукції j-ї споживаючої галузі.

Коефіцієнти b_{ij} показують сумарні витрати продукту i-ї галузі на виробництво одиниці кінцевого продукту галузі j <u>по усій ланці зв'язаних виробництв</u>. Це обґрунтовується тим, що <u>для продуктивної</u> матриці A матрицю $(E - A)^{-1}$ можна представити у вигляді ступеневого ряду матриць:

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+A^3+A^4+\ldots, \qquad (2.17)$$

де $A^2=A\cdot A,\ A^3=A\cdot(A^2),\ A^4=A\cdot(A^3)$ и т.д.

Враховуючі рівняння (2.17) вектор валової (2.15) продукції може бути представлений через матричний ряд:

$$X=Y+A\cdot Y+A^2\cdot Y+A^3\cdot Y+A^4\cdot Y+\ldots. \qquad (2.18)$$

Складові $A\cdot Y, A^2\cdot Y, A^3\cdot Y, A^4\cdot Y$ економічно інтерпретуються як проміжні витрати. Таким чином, щоб виробити кінцевий продукт Y необхідно безпосередньо витратити продукції в об'ємах, які показує вектор $A\cdot Y$. Щоб виробити продукцію $A\cdot Y$ необхідні її витратити в об'ємах $A^2\cdot Y$, виготовлення яких, в свою чергу, вимагають витрат продукції в об'ємах $A^3\cdot Y$ и т.д. Із рівняння (2.18) витікає, що рішення рівняння (2.15) можна отримати ітераційно за формулою:

$$X^{k+1}=A\cdot X^k+Y. \qquad (2.18)$$

де k – кількість ітерацій.

Ітеративні (ітераційні) методи рішення задач – полягають в тому, що обчислювальний процес починають з деякого пробного (довільного) допустимого рішення, а потім застосовують алгоритм, що забезпечує послідовне цього рішення.

Ітерація – повторне, циклічне застосування математичної операції (зміненими даними) при рішенні обчислювальних задач для поступового наближення до потрібного результату. Ітеративні розрахунки на ЕОМ характерні для вирішення економічних (особливо оптимізаційних і балансових) . Кількість необхідних циклічних перерахунків (ітерацій) визначає сходимість алгоритму.

За моделлю Леонтьєва (2.15) можна виконати наступні розрахунки.

Задаючи для кожної галузі величини валової продукції (x_i), можна визначити об'єми кінцевої продукції кожної галузі (y_i):

$$Y=(E-A)\cdot X, \qquad (2.19)$$

Задаючи величини кінцевої продукції i-их галузей (y_i) можна визначити величини валової продукції кожної галузі (x_i):

$$X = B \cdot Y. \qquad (2.20)$$

Визначення об'єму умовно чистої продукції, що створюється у j-й галузі, передбачено за залишковою ознакою:

$$z_j = x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \, . \qquad (2.21)$$

В залежності від мети та об’єкту дослідження міжгалузеві баланси класифікуються за наступними ознаками:

- ✓ одиниці вимірювання (натуральні, натурально-вартісні, ціннісні);
- ✓ об’єкт аналізу (народногосподарські, районні, міжрайонні, внутрішньогалузеві);
- ✓ період аналізу (статичні, динамічні);
- ✓ мета дослідження (звітні, планові).

Запропонований Леонтьєвим метод «витрати-випуск» суттєво вплинув на подальший розвиток економічної думки, а сам автор отримав Нобелівську премію з економіки у 1973 році. Прикладами подальшого розвитку його ідей можуть слугувати динамічні моделі Неймана-Гейла, які позбавлені суттєвого недоліку моделі Леонтьева – необхідності працювати із «чистими» технологічними галузями. Метод «витрати-випуск» суттєво вплинув на формування національних рахунків країн. Також розроблені теорії, що дозволяють за змінами коефіцієнтів прямих матеріальних витрат відслідковувати якісні зміни в економіці. Незважаючи на все це існують наукові роботи в яких критикується модель Леонтьєва та ставляться під сумнів практичні результати отримані на її базі.

Запитання для самостійної перевірки знань:

1. Визначення МГБ. Його роль в сучасній економічній науці.
2. Дати визначення господарчий та технологічній галузям. Вказати відмінності між цими поняттями.
3. Таблиця МГБ та її складові.

4. Сутність та розрахунок валового виробництва та валового споживання галузі.

5. Міжгалузеві постачання та їх вплив на валове виробництво та валове споживання.

6. Що включає в себе кінцева продукція галузі?

7. Що включає в себе умовно-чиста продукція на загальнонаціональному рівні та рівні підприємства.

8. Умови табличної побудови МГБ.

9. Визначення та розрахунок коефіцієнтів прямих матеріальних витрат;

10. Продуктивність матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат.

11. Визначення та розрахунок коефіцієнтів повних матеріальних витрат;

12. Економіко-математичне обґрунтування формули $B=(E-A)^{-1}$.

13. Поняття ітерацій та ітераційні алгоритми в МГБ та інших економіко-математичних моделях.

14. Матричні розрахунки за моделлю В.В. Лєонтьєва.

Список використаної літератури:

1. Леонтьев В.В. Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика / В.В. Леонтьев – М.: «Политиздат», 1990. – 415 с.

2. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика; Пер. с англ. / В.В. Леонтьев – М.: Экономика, 1997. – 480 с.

3. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач / И.В. Орлова – М.: Вузовский учебник, 2005. – 203 с.

4. Подчищаева О.В. Итерационные методы решения больших задач межотраслевого баланса / О.В. Подчищаева, Ю.Н. Пыхтеев // Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Экономика и финансы. – Издательство НГУ. – № 1. – 2004. – С. 57-61.

5. Таблиця «витрати-випуск» за 2011 рік (в цінах споживачів) [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://ukrstat.org/uk/operativ/operativ2013/vvp/virt_vip/vitr_vip13_u.html

6. Карганов С.А. Об ошибочности использования в народнохозяйственном планировании экономико-математической модели В.Леонтьева и межотраслевых балансов «затраты-выпуск», 2006. – 32 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : – http://karganov.am.szczecin.

ТЕМА 3. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ, ПОНЯТТЯ ТА ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1.Теоретичні основи математичного програмування

Величина f називається **функцією** змінних $x_1,\ldots,x_n$ якщо кожному з тих значень, які можуть приймати $x_1,\ldots,x_n$ відповідає одне або декілька значень f. При цьому змінні величини $x_1,\ldots,x_n$ називаються <u>аргументами</u>.

Область визначення функції – сукупність всіх значень які можуть приймати змінні в умовах даної задачі.

Екстремальні точки функції – точки максимуму і мінімуму.

Говорять, що функція $f(x)$ має <u>максимум</u> в точці a, якщо в достатній близькості від цієї точки всім значенням, як більшим, так і меншим a відповідають значення $f(x)$, менші, ніж $f(a)$.

Функція $f(x)$ має <u>мінімум</u> в точці a, якщо в достатній близькості від цієї точки всім значенням x відповідають значення $f(x)$, більші, ніж $f(a)$.

Необхідна умова екстремуму: якщо функція $f(x)$ має екстремум (максимум або мінімум) в точці, то в цій точці похідна, або рівна нулю, або нескінченна, або не існує.

Достатні умови максимуму і мінімуму:

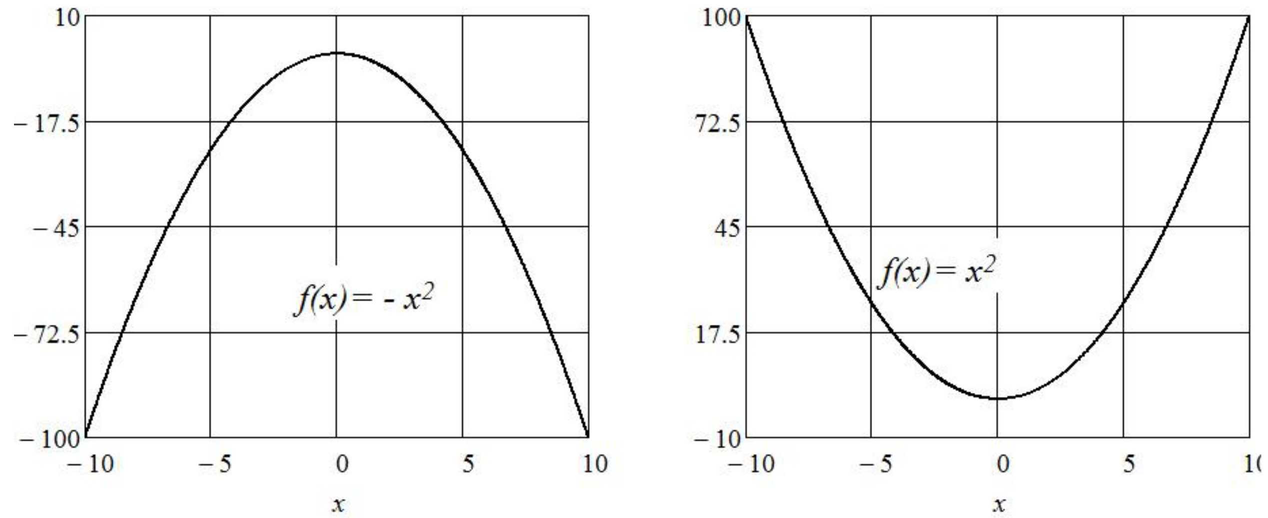
1. якщо в достатній близькості від точки $x=a$ похідна позитивна ліворуч від a і негативна праворуч від a, то в самій точці $f'(x)\ x=a$ функція $f(x)$ має максимум за умови, що функція $f(x)$ тут безперервна (рис. 3.1 а);

2. якщо ліворуч від a похідна $f'(x)$ негативна, а праворуч – позитивна, то $f(x)$ має в точці a мінімум за умови, що він тут безперервна (рис. 3.1 б).

Якщо $f'(x)$ зберігає знак, то немає не максимуму не мінімуму; при $f'(x)>0$ функція $f(x)$ в точці a зростає, а при $f'(x)<0$ – убавляється.

3.2. Основні визначення і поняття математичного програмування

Математичне програмування (МП) – розділ прикладної математики що займається розробкою теорії і практичних методів рішення задач знаходження екстремуму функцій $f(X)$ на безлічі кінечномірного векторного простору X, що визначається лінійними і нелінійними обмеженнями (рівняннями і (або) нерівностями).



а б

Рисунок 3.1 – Графіки функцій, що мають точки максимуму (а); мінімуму (б)

Слово «програмування» в даному випадку потрібно розуміти як «планування», оскільки в англійській мові слово «programming» означає планування, складання планів або програм. Крім того слово «програмування» пояснюється ще тим, що сукупність змінних, що підлягають знаходженню, звичайно визначає програму (план) роботи деякого економічного об'єкту (виробничу програму, програму перевезень і т.д.). Тут програма розуміється як допустима послідовність подій.

МП також називають **оптимізаційними** .

Під **оптимізацією,** як правило, розуміють процес вибору якнайкращого, за деяким критерієм, варіанту безлічі допустимих або процес приведення системи в якнайкращий, за деяким критерієм, стан безлічі можливих, який відбувається, як правило, шляхом знаходження екстремуму певної функції.

Оптимальне планування – комплекс методів, що дозволяють вибрати багатьох альтернативних варіантів плану або програми один оптимальний варіант, тобто з погляду заданого критерію оптимальності при певних обмеженнях.

Оптимальне управління – означає вибір керованих параметрів, що забезпечували б якнайкраще, з погляду заданого критерію, протікання процесу або якнайкращу поведінку системи, її цілеспрямований розвиток по оптимальній траєкторії.

В економічних оптимізаційних задачах **критерієм оптимальності (КО)** є показник, котрий виражає міру економічного ефекту управлінського рішення, схвалюваного на основі розв’язання задачі МП. Він призначений для порівняльної оцінки допустимих альтернативних рішень та вибору якнайкращого з них.

Керовані змінні (КЗ) – величини, значення котрих необхідно підібрати таким чином, щоб вибрати найкращий, по деякому критерію, варіант із множини допустимих або привести систему в найкращий, за деяким критерієм, стан із безлічі можливих.

Наявність КЗ це головне, що відрізняє моделі нормативного типа, від описових, дескриптивних моделей (див. тему 1).

Вибір критерію оптимальності, кількості та економічного сенсу КЗ здійснюється на етапі **постановки оптимізаційної задачі**. Цей важливий етап оптимізації також включає визначення взаємозв'язків між КЗ та числових характеристик оптимізаційної задачі.

Після виконання постановки задачі у вигляді тексту, таблиць, логічних співвідношень, її виражають мовою математики, тобто проводять формалізацію. **Формалізація оптимізаційної задачі**, як правило, полягає у формуванні цільової функції та обмежень.

Цільова функція (ЦФ) – математичне відображення критерію оптимальності. Зв'язує в одному математичному виразі усі (або значну частину) КЗ. Оптимальні значення КЗ визначаються, як правило, шляхом знаходження екстремуму ЦФ.

Обмеження – система рівнянь і (або) нерівностей, які зв'язують КЗ, і таким чином, обмежують їх область допустимих значень.

Областю допустимих значень КЗ (ОДЗ КЗ), в умовах даної оптимізаційної задачі, є їх значення, котрі відповідають їх економічному сенсу, особливостям ЦФ, також вони мають задовольняти обмеженням.

ЦФ та обмеження складають **оптимізаційну модель (ОМ).**

Процес постановки та формалізації оптимізаційних задач може породжувати оптимізаційні моделі в яких використовується дуже різний математичний апарат. Саме тому в рамках МП сформувалося багато напрямків, які розробляють методи рішення різних класів оптимізаційних задач. Основні із розділів МП ми детально розглянемо в рамках наступних тем, нижче дамо лише коротку характеристику кожному із основних розділів МП.

3.3. Основні розділи МП

Лінійне програмування (ЛП) розглядає оптимізаційні моделі з лінійною ЦФ та усіма лінійними обмеженнями;

Нелінійне програмування (НП) працює з оптимізаційними моделями, в котрих присутня нелінійна ЦФ и (або) хоча б одне нелінійне обмеження.

Динамічне програмування (ДП) розглядає оптимізаційні задачі, що мають багатокрокову структуру, пов'язану, як правило, з тим, що управлінський процес розтягнутий в часі.

Стохастичне програмування (СП) враховує вірогідносний характер економічних та соціально-економічних процесів на етапах постановки, формалізації та рішення оптимізаційних задач.

Параметричне програмування (ПП) досліджує задачі в яких числові характеристики оптимізаційних моделей приймаються не постійними, а залежними від деяких параметрів.

Відділяють також **дискретне програмування (Дис.П)** – розіділ МП, котрий розглядає оптимізаційні задачі в яких КЗ можуть приймати тільки дискретні, наприклад цілочисельні значення.

Запитання для самостійної перевірки знань:

1. Екстремуми функції. Необхідна та достатня умова їх існування.
2. Поняття КО. Його приклади а економічних оптимізаційних задачах.
3. Поняття КЗ.
4. В чому, як правило, полягає постановка оптимізаційної задачі?
5. В чому полягає формалізація оптимізаційної задачі?
6. Поняття ЦФ.
7. Обмеження та їх роль в оптимізаційних моделях.
8. Що визначає ОДЗ КЗ?
9. Коротко охарактеризувати основні розділи МП.

Список використаної літератури

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский – М.: Наука, 1965. – 872 с.
2. Харчистов Б.Ф. Методы оптимизации: Учебное пособие / Б.Ф. Харчистов – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004. – 140 с.
3. Карманов В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2004. – 283 с.
4. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Таха, А. Хемди, 7-е изд.; пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
5. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.

ТЕМА 4. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Лінійне програмування

Лінійне програмування (ЛП) – розділ МП, що розробляє теорію і методи рішення задач знаходження екстремуму лінійної цільової функції за наявності лінійних обмежень.

До задач ЛП відноситься широке коло питань планування економічних і техніко-економічних процесів, де ставиться пошуку оптимального рішення. Перші дослідження з ЛП були проведені в 30-роки XX століття. Термін «лінійне програмування» запропонований американським вченим (Джорджем Данцигом) на межі 40-х і 50-х років. Найінтенсивніше лінійне програмування розвивалося в 50-х, 60-х роках, коли воно було одним з «наймодніших» напрямків прикладної математики.

Загальне математичне формулювання задачі ЛП може мати вигляд:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1i} \cdot x_i + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \le b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2i} \cdot x_i + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1} \cdot x_1 + a_{j2} \cdot x_2 + \ldots + a_{ji} \cdot x_i + \ldots + a_{jn} \cdot x_n = b_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mi} \cdot x_i + \ldots + a_{mn} \cdot x_n < b_m, \\ x_i \ge 0. \end{cases} \qquad (4.1)$$

де $x_1,\ldots,x_n$ – КЗ; n – кількість КЗ ($i = 1..n$); c_i – параметри ЦФ (цільові коефіцієнти); a_{ij} – коефіцієнти при керованих змінних в обмеженнях; b_j – права частина обмежень (ПЧО); m – кількість обмежень ($j = 1..m$).

4.2 Графічний метод рішення задач ЛП

Графічний метод, свою очевидність і можливість застосування лише у випадку малої розмірності , дозволяє зрозуміти якісні особливості ЛП, характерні для будь-якої розмірності простору змінних і лежить в основі деяких інших методів рішення задач ЛП.

Графічний метод зручно застосовувати при кількості КЗ не більше 2-х. При 3-х КЗ у задачі використання графічного методу є ускладненим, а при кількості КЗ більше 3-х практично неможливо. Хоча в оптимізаційних задачах із кількістю змінних більше 2-х, деякі з них можна зафіксувати на певному рівні, а оптимальний план знаходити шляхом пошуку значень КЗ, що залишились. Такий підхід не є перспективним, оскільки існує багато методів рішення задач ЛП із кількістю КЗ більше двох. Тому в рамках даного розділу будемо розглядати лише задачі ЛП із двома керованими змінними, загальна форма яких може мати вигляд:

$$f(x_1, x_2) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \to \max,$$

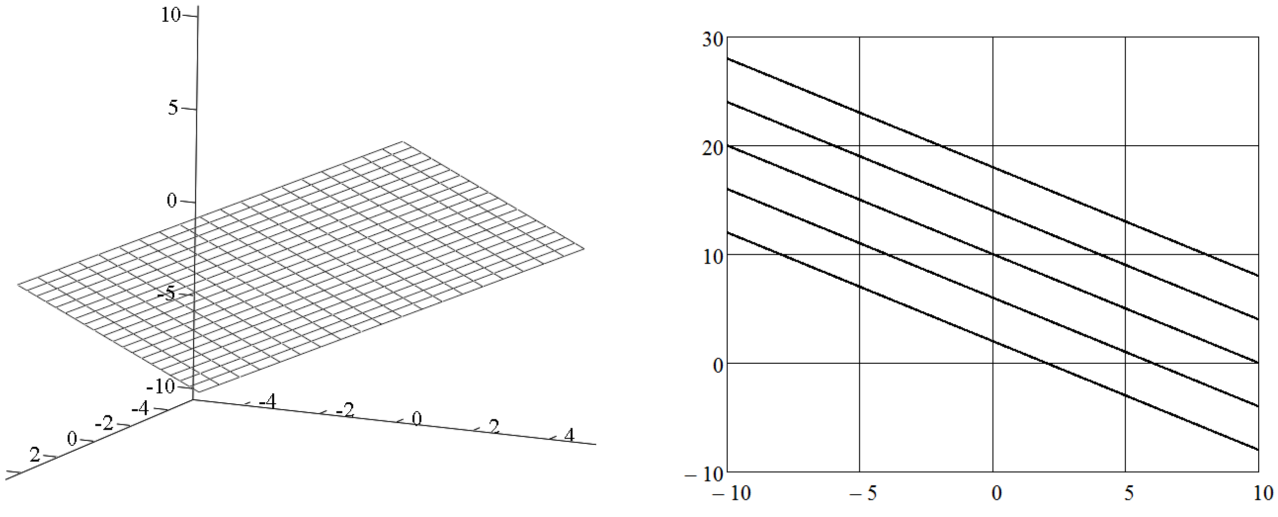
$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \le b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1} \cdot x_1 + a_{j2} \cdot x_2 \le b_j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 \le b_m, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Обмеження можуть також містити рівняння та нерівності виду:

$$a_{j1} \cdot x_1 + a_{j2} \cdot x_2 \ge b_j. \tag{4.3}$$

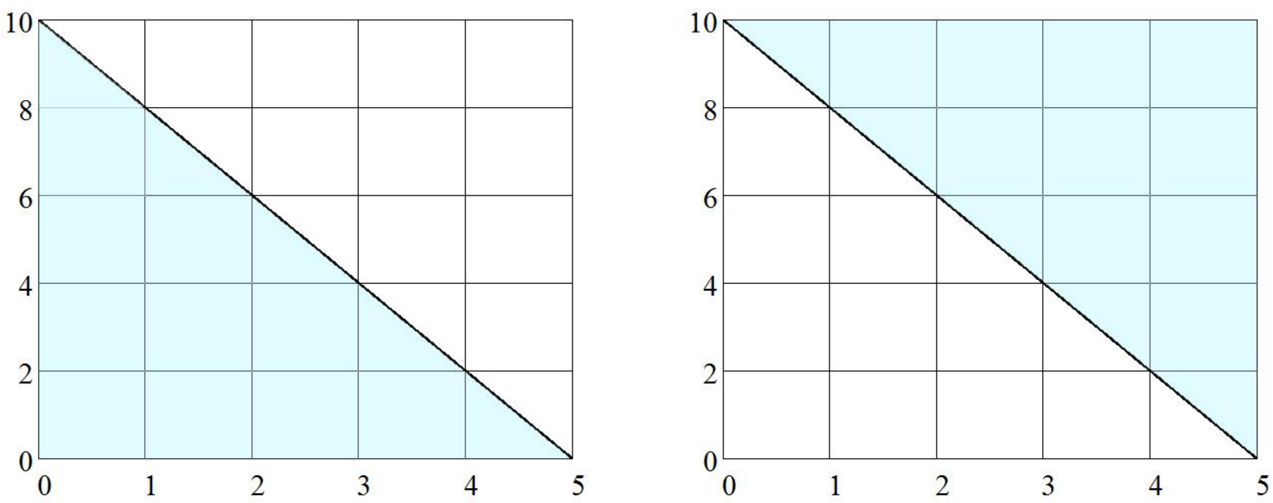
Коротко розглянемо <u>геометричні основи рішення задач ЛП графічним методом.</u> ЦФ являє собою функцію двох змінних. Її геометричною інтерпретацією буде площина у 3-х мірному просторі (рис. 4.1 а), або безкінечне число паралельних прямих у 2-о мірному просторі (рис. 4.1 б).

Геометричною інтерпретацією нерівності $a_{j1} \cdot x_1 + a_{j2} \cdot x_2 \le b_j$ буде півплощина, яка обмежується прямою $a_{j1} \cdot x_1 + a_{j2} \cdot x_2 = b_j$. Причому, при обмеженні виду (4.2) напівплощина буде містити усі значення, що менші ніж ті, що визначаються прямою (рис. 4.2 а), а при обмеженні виду (4.3) – усі значення більші від $a_{j1} \cdot x_1 + a_{j2} \cdot x_2 = b_j$ (рис. 4.2 б). Якщо нерівність містить знак «≤», то точки оптимуму можуть лежати на прямій, а якщо знак – «<», то вони будуть лежати поза прямою. Аналогічно зі знаками «≥» та «>».



а б

Рисунок 4.1 – Геометрична інтерпретація ЦФ з двома змінними



а б

Рисунок 4.2 – Геометрична інтерпретація лінійних обмежень

4.3 Приклад графічного розв’язання задачі ЛП

Розглянемо задачу оптимізації закупівель.

Задача 4.1. Підприємство виготовляє три виду різних продуктів *A*, *B*, *C*. Для виготовлення кожного із продуктів використовується одна і таж сировина, що може закупатися у двох постачальників. Із 1 т сировини постачальника 1 можна приготувати 0,25 т продукту *A*, 0,15 т продукту *B*, 0,3 т продукту *C*, а інші 0,3 т ідуть у відходи. Із 1 т сировини постачальника 2 можна приготувати 0,3 т продукту *A*, 0,2 т продукту *B*, 0,2 т продукту *C*, а інші 0,3 т ідуть у відходи.

Причому умовою диверсифікації постачань є те, що у одного постачальника можна купити не більше 70% загального об'єму сировини. На ринку може бути реалізовано не більше 2 т продукту *A*, 1,6 т – продукту *B*, 1,8 т – продукту *C*. Відносний прибуток який дає одна тонна сировини постачальника 1 складає 6,3 тис. грн., а постачальника 2 – 5,5 тис. грн. Необхідно визначити таку кількість сировини, що закуповується у кожного з постачальників, при якій прибуток підприємства буде максимальним.

Критерієм оптимальності в умовах даної задачі буде прибуток підприємства. Позначимо через x_1 кількість сировини, що буде закуповуватися у постачальника 1, а через x_2 – у постачальника 2. Тоді ЦФ матиме вигляд:

$$f(x_1, x_2) = 6{,}3 \cdot x_1 + 5{,}5 \cdot x_2 \to \max. \tag{4.4}$$

Обмеження, що враховують максимальну кількість продуктів, які може продати фірма, будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} 0{,}25 \cdot x_1 + 0{,}3 \cdot x_2 \le 2, \\ 0{,}15 \cdot x_1 + 0{,}2 \cdot x_2 \le 1{,}6, \\ 0{,}3 \cdot x_1 + 0{,}2 \cdot x_2 \le 1{,}8. \end{cases} \tag{4.5}$$

Обмеження, що враховує диверсифікацію постачань сировини, має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 \le 0{,}7 \cdot (x_1 + x_2), \\ x_2 \le 0{,}7 \cdot (x_1 + x_2). \end{cases} \tag{4.6}$$

Окрім того, необхідно зауважити, що об'єми закупівель не можуть приймати негативні значення, тобто:

$$\begin{cases} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

ЦФ (4.4) та обмеження (4.5), (4.6), (4.7) будуть складати <u>оптимізаційну модель:</u>

$$
f(x_1, x_2) = 6{,}3 \cdot x_1 + 5{,}5 \cdot x_2 \to \max,
$$

$$
\begin{cases}
0{,}25 \cdot x_1 + 0{,}3 \cdot x_2 \le 2, \\
0{,}15 \cdot x_1 + 0{,}2 \cdot x_2 \le 1{,}6, \\
0{,}3 \cdot x_1 + 0{,}2 \cdot x_2 \le 1{,}8, \\
x_1 \le 0{,}7 \cdot (x_1 + x_2), \\
x_2 \le 0{,}7 \cdot (x_1 + x_2), \\
x_1 \ge 0, \\
x_2 \ge 0.
\end{cases} \tag{4.7}
$$

Графічне розв’язання задачі (4.7) здійснимо у декілька етапів:

1. Побудуємо прямі, що будуть розділяти півплощини обмежень (4.5), (4.6) рис. 4.3. Обмеження (4.7) будуть являти на графіку (рис. 4.3) вісі координат.

Червоною лінією позначена пряма, що відповідає першому обмеженню з системи (4.5), зеленою – другому обмеженню, чорною – третьому обмеженню цієї ж системи. Синя та оранжева лінії відповідають першому та другому обмеженню системи (4.7) відповідно.

Як видно із рис. 4.3, область допустимих значень (ОДЗ) КЗ визначають обмеження за диверсифікацією постачальників (4.6) та обмеження на реалізацію першого та третього продуктів підприємства.

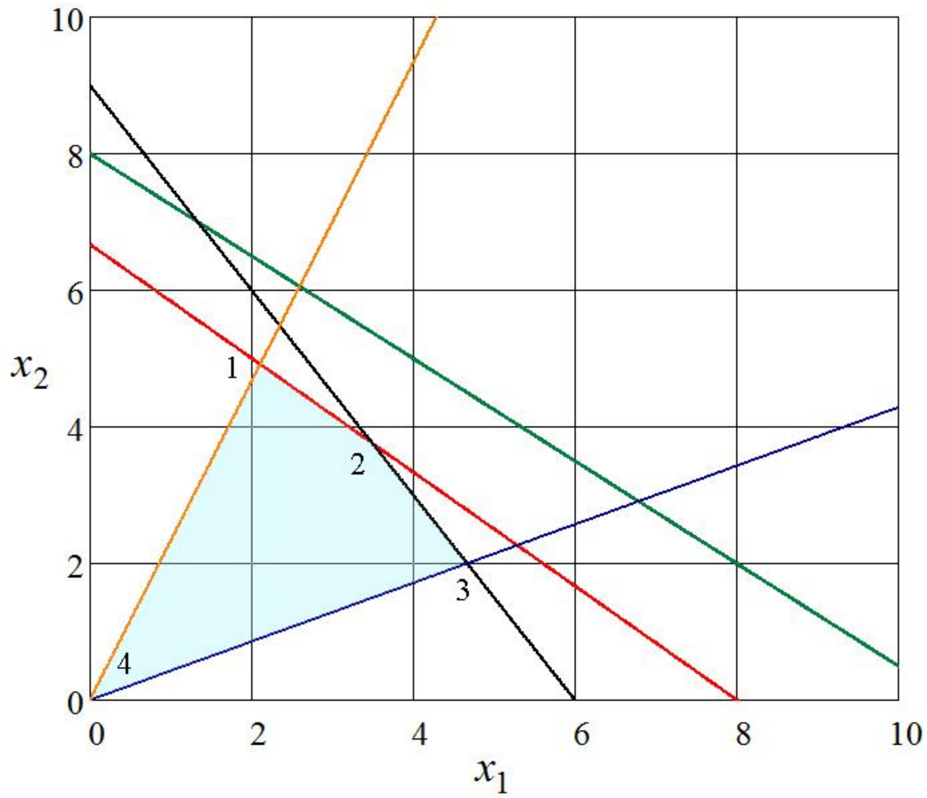


Рисунок 4.3 – Геометрична інтерпретація обмежень та ОДЗ КЗ

2. ЦФ може приймати усі значення з області визначення, однак оптимальні точки будуть знаходитися на вершинах багатокутника. Вершинами багатокутника будуть точки із наступними координатами: точка 1 – $x_1 = 2{,}105$, $x_2 = 4{,}912$; точка 2 – $x_1 = 3{,}5$, $x_2 = 3{,}75$; точка 3 – $x_1 = 4{,}667$, $x_2 = 2$; точка 4 – $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Щоб визначити, яка з точок буде оптимальною, необхідно розрахувати значення ЦФ у кожній із них. Точку 4 відразу відкидаємо, очевидно, що значення в ній ЦФ буде дорівнювати 0. Значення ЦФ у точці 1 буде дорівнювати $f_1(x_1, x_2) = 40{,}277$; в точці 2 – $f_2(x_1, x_2) = 42{,}675$; в точці 3 – $f_3(x_1, x_2) = 40{,}402$. У точці 2 ЦФ буде приймати максимальне значення 42,675 із області допустимих.

3. Щоб побудувати ЦФ на графіку, необхідно підставити довільне значення однієї зі змінних x_1 чи x_2 до рівняння $f_{\max}(x_1, x_2) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$, де $f_{\max}(x_1, x_2)$ – максимальне значення з області допустимих.

В умовах задачі 4.1 $f_{\max}(x_1, x_2) = 42{,}675$. Тобто ЦФ буде визначатися рівнянням $6{,}3 \cdot x_1 + 5{,}5 \cdot x_2 = 42{,}675$ (рис. 4.4) показана пунктирною лінією.

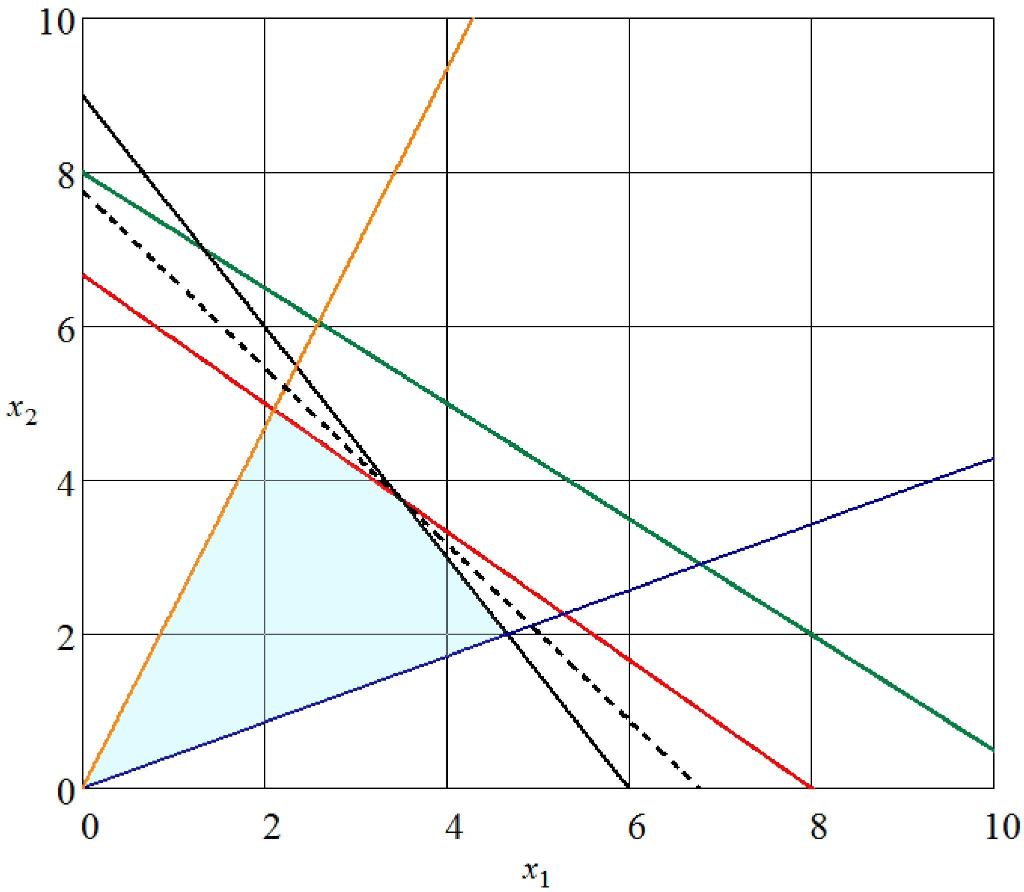


Рисунок 4.4 – Графічне рішення ЛП

В результаті рішення задачі 4.1 ЛП отримано такий результат: у першого постачальника необхідно закупити 3,5 т сировини, а у другого постачальника – 3,75 т, при такому співвідношенні закупівель прибуток підприємства буде максимальним і складатиме 42,675 тис. грн.

Необхідно зауважити, що оптимальну точку визначають обмеження на реалізацію першого та третього продуктів підприємства (рис. 4.4). Очевидно, що для підвищення прибутків підприємства необхідно розширити обмеження на реалізацію першого та третього продукту.

4.4. Поняття симплекс-методу рішення задач ЛП

Геометрична інтерпретація, якою ми користувалися при рішенні задач ЛП графічним методом, стає складною при числі КЗ, рівному 3 та перестає бути придатною для цієї мети при їх числі більше 3. Для знаходження рішення задачі ЛП в загальному випадку (при довільному числі КЗ) застосовуються не графічні, а обчислювальні методи. Найбільш універсальним з них є симплекс-метод.

Симплекс-метод рішення задач ЛП, був розроблений Джорджем Данцигом наприкінці 40-х років XX ст. Назва симплекс-метод пішла від назви опуклої оболонки $(m+1)$ точок, що знаходяться в загальному положенні, в m-мірному просторі називається m-мірним симплексом.

<u>m-мірним лінійним простором</u> називається множина всіх m-мірних векторів, для котрих визначені операції множення на дійсні числа та складання. m-мірний лінійний простір, на якому визначене скалярне множення називається <u>m-мірним евклідовим простором</u> і позначається символом E_m. m-мірний евклідовий простір скорочено далі називається m-мірним простором або простором. m-мірні вектори є елементами простору E_m.

Кожна з лінійних нерівностей виду $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \le b_j$, утворює гіперплощину, яка обмежує півпростір у відповідному лінійному просторі.

Гіперплощина – підпростір евклідова простору з розмірністю, на одиницю меншою, ніж охоплюючий простір. Наприклад, для двовимірного простору гіперплощина є прямою, для тривимірного – площиною. В результаті всі нерівності обмежують деякий багатогранник (можливо нескінченний).

Рівняння $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i = s$, де $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i = s$ – ЦФ, що максимізується або мінімізується, породжує гіперплощину. Залежність від s породжує сімейство паралельних гіперплощин. Тоді задача оптимізації набуває наступного формулювання: потрібно знайти таке найбільше s, що гіперплощина $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i = s$ перетинає багатогранник хоч би в одній точці. Перетин оптимальної гіперплощини і багатогранника міститиме хоч би одну вершину, причому, їх буде більше однієї, якщо перетин містить ребро чи грань. Тому максимум функціонала можна шукати у вершинах багатогранника. Принцип симплекс-методу полягає в тому, що вибирається одна з вершин багатогранника, після чого починається рух його ребрами від вершини до вершини у бік збільшення значення ЦФ. Коли перехід ребром з поточної вершини в іншу вершину з вищим значенням функціонала неможливий, вважається, що оптимальне значення s знайдено. Геометрична сутність симплекс-методу для задачі з трьома КЗ, тобто для тримірного евклідового простору, представлена на рис. 5.1.

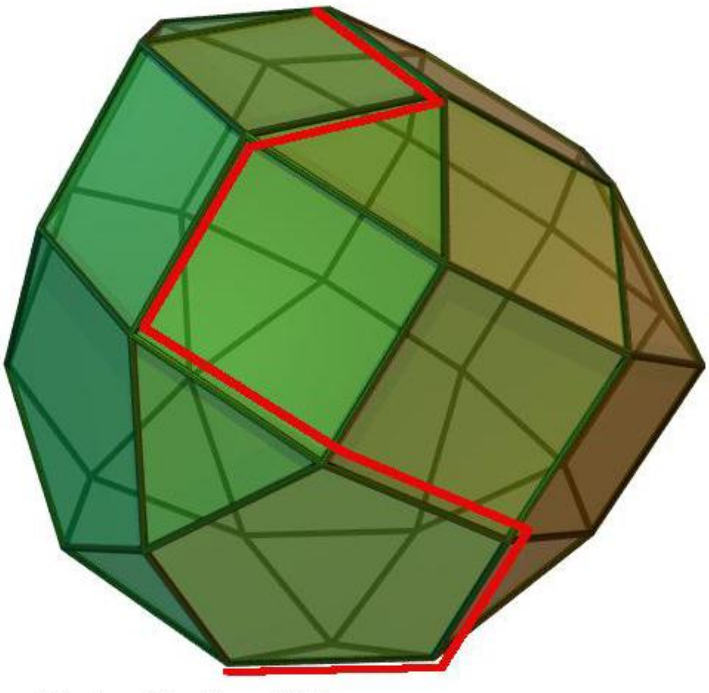


Рисунок 4.5 – Геометрична інтерпретація симплекс-методу для тримірного евклідового простору

Таким чином, симплекс-метод рішення задач ЛП за скінченне число кроків (ітерацій) дозволяє отримати рішення оптимізаційної задачі, якщо таке рішення існує. На кожному кроці визначається нове допустиме базисне рішення, якому відповідає значення ЦФ більше, ніж значення ЦФ при попередньому допустимому базисному рішенні.

4.5 Особливі випадки рішення задач ЛП

Якщо гіперплощина ЦФ співпадає із гіперплощиною, що відповідає певному зв'язуючому обмеженню, то буде існувати множена альтернативних оптимальних рішень, які будуть визначатися границею ОДЗ КЗ, наприклад гранню багатогранника допустимих рішень (рис. 4.5). Також гіперплощина ЦФ може співпадати із ребром багатогранника, тоді буде існувати множина альтернативних оптимальних рішень, що лежать на цьому ребрі. На практиці альтернативні оптимальні рішення надзвичайно корисні, оскільки дозволяють зробити вибір серед множини рішень без погіршення значення ЦФ.

В деяких задачах ЛП значення змінних можуть необмежено зростати без порушення обмежень. Це означає, що ОДЗ КЗ не замкнене, хоча б по одному напрямку. В результаті, ЦФ може зростати (задача максимізації) або зменшуватись (задача мінімізації) необмежено. Для прикладу звернемося до графічного методу (рис. 4.3). Припустимо на графіку присутні лише прямі, що відповідають лише обмеженням (4.6), тоді багатокутних допустимих рішень не замкнений. Отже існує нескінченна множина допустимих рішень, серед яких ЦФ досягає максимум в точці із координатами $x_1 = \infty$, $x_2 = \infty$. Таке рішення не влаштовує нас із практичної точки зору.

Необмеженість ОДЗ КЗ оптимізаційної задачі може свідчити, або про неправильну її постановку, або про неправильну її формалізацію. Типові помилки, що призводять до побудови не коректних моделей, полягають в тому, що не враховуються певні обмеження вцілому або невірно оцінюються їх числові характеристики.

Якщо обмеження задачі ЛП несумісні, тобто вони не можуть виконуватись одночасно, то така задача не має допустимих рішень. Така ситуація може мати місце, коли оптимізаційна модель містить різні типи обмежень (рівняння, та нерівності зі знаками «≤», «≥», «<», «>»). Така ситуація означає, як правило, що оптимізаційна задача не правильно поставлена.

Запитання для самостійної перевірки знань:

1. Дати визначення та коротку характеристику ЛП.
2. Структура та складові оптимізаційної моделі ЛП в загальній постановці.
3. Геометричні основи графічного методу рішення задач ЛП.
4. Перелічити основні етапи рішення задач ЛП графічним методом.
5. Переваги, недоліки та обмеженість графічного методу.
6. Дати визначення поняттю гіперплощина. Навести приклади.
7. Дати коротку характеристику симплекс-методу рішення задач ЛП.
8. Вказати коли задача ЛП буде мати альтернативні оптимальні рішення.
9. Вказати коли задача ЛП не має рішення.

Список використаної літератури

1. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
2. Харчистов Б.Ф. Методы оптимизации: Учебное пособие. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004. – 140с.
3. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2004. – 283 с.
4. Алесинская Т.В., Сербин В.Д., Катаев А.В. Учебно-методическое пособие по курсу «Экономико-математические методы и модели. Линейное программирование». Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. – 79 с.
5. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Таха, А. Хемди, 7-е изд.; пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
6. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
7. Скворчевський О.Є. Порівняльний аналіз способів рішення задач лінійного програмування засобами MS Excel та Mathcad / О.Є. Скворчевський, А.О. Рассоха // Проблеми обліку, контролю та аналізу в економіці України [Текст]: Тези доповідей II наукової конференції, 15 жовтня 2009. – Львів: НУ «ЛП», 2009. – С. 139-141.

ТЕМА 5. ПОНЯТТЯ ДВОЇСТОСТІ В ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

5.1. Поняття двоїстості в лінійному програмуванні.

Із кожною задачею лінійного програмування (5.1) може бути пов'язана інша задача лінійного програмування (5.2), причому оптимізаційна задача (5.1) називається **прямою**, а оптимізаційна задача (5.2) називається **двоїстою** до неї.

$$f(x_1,\ldots,x_n) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_i \cdot x_i + \ldots + c_n \cdot x_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_{12} + \ldots + a_{1i} \cdot x_i + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_{12} + \ldots + a_{2i} \cdot x_i + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1} \cdot x_1 + a_{j2} \cdot x_{12} + \ldots + a_{ji} \cdot x_i + \ldots + a_{jn} \cdot x_n = b_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_{12} + \ldots + a_{mi} \cdot x_i + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m, \\ x_i \ge 0, \quad i = 1..n, \quad j = 1..m. \end{cases} \tag{5.1}$$

де $x_1,\ldots,x_n$ – КЗ прямої задачі (ПЗ);

$c_1,\ldots,c_n$ – цільові коефіцієнти ПЗ;

n – кількість КЗ ПЗ (враховуючи додаткові змінні, необхідні для приведення оптимізаційної моделі до канонічного вигляду);

$b_1,\ldots,b_m$ – ПЧО прямої задачі;

m – кількість обмежень прямої задачі;

$a_{11},\ldots,a_{mn}$ – коефіцієнти при КЗ в обмеженнях ПЗ.

$$z(y_1,\ldots,y_m) = b_1 \cdot y_1 + b_2 \cdot y_2 + \ldots + b_j \cdot y_j + \ldots + b_m \cdot y_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot y_1 + a_{21} \cdot y_2 + \ldots + a_{j1} \cdot y_j + \ldots + a_{m1} \cdot y_m \ge c_1; \\ a_{12} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + \ldots + a_{j2} \cdot y_j + \ldots + a_{m2} \cdot y_m \ge c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ a_{1i} \cdot y_1 + a_{2i} \cdot y_2 + \ldots + a_{ji} \cdot y_j + \ldots + a_{mi} \cdot y_m \ge c_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ a_{1n} \cdot y_1 + a_{2n} \cdot y_2 + \ldots + a_{jn} \cdot y_j + \ldots + a_{mn} \cdot y_m \ge c_n; \\ j = 1..m; \quad i = 1..n. \end{cases} \tag{5.2}$$

де $y_1,...,y_m$ – КЗ двоїстої задачі (ДЗ);

$b_1,...,b_m$ – цільові коефіцієнти ДЗ;

m – кількість КЗ двоїстої задачі;

$c_1,...,c_n$ – праві частини обмежень ДЗ;

n – кількість обмежень ДЗ;

$a_{11},...,a_{mn}$ – коефіцієнти при КЗ в обмеженнях ДЗ.

ПЗ (5.1) записана у канонічній (стандартній) формі. Канонічна форма запису задачі ЛП має відповідати наступним вимогам:

1. усі обмеження записані у вигляді рівнянь із невід'ємною правою частиною $b_j \geq 0$;
2. усі КЗ невід'ємні $x_i \geq 0$;
3. в ЦФ та обмеження входять усі КЗ, включаючи ті, що необхідні для приведення нерівностей до форми рівнянь. Цього можна досягти включивши в ЦФ чи обмеження КЗ, що в них не входять, помноживши ці КЗ на нульові коефіцієнти.

Як видно із оптимізаційних моделей (5.1) і (5.2), змінні і обмеження ДЗ формуються шляхом симетричних структурних перетворень ПЗ за наступними правилами:

1. кожному з m обмежень ПЗ відповідає змінна ДЗ;
2. кожній зі n змінних ПЗ відповідає обмеження ДЗ;
3. коефіцієнти при КЗ в обмеженнях ПЗ стають коефіцієнтами при КЗ в обмеженнях ДЗ за принципом, показаному на прикладах (5.1) і (5.2);
4. ПЧО ДЗ дорівнюють цільовим коефіцієнтам ПЗ;
5. цільові коефіцієнти ДЗ дорівнюють ПЧО ПЗ.

Якщо пряма задача приведена до канонічної (стандартної) форми (5.1), то правила, що визначають напрямок оптимізації та тип обмежень, можуть бути представлені у вигляді табл. 5.1 [2].

Таблиця 5.1 – Правила, що визначають напрямок оптимізації та тип обмежень ДЗ

ЦФ прямої задачі	Двоїста задача	
	Цільова функція	Тип обмеження
Максимізується	Мінімізується	$\geq$
Мінімізується	Максимізується	$\leq$

Умови невід'ємності КЗ двоїстої задачі потрібні не завжди. Як правило вони витікають із симетричних структурних перетворень ПЗ в двоїсту.

Очевидно, що задача двоїста для двоїстої співпадає із прямою.

Значення ЦФ прямої та двоїстої задачі зв'язані нерівністю:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \le \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot y_j \,, \tag{5.3}$$

де $x_1,\ldots,x_n$ – допустиме довільне рішення ПЗ;

$y_1,\ldots,y_m$ – допустиме довільне рішення ДЗ.

Основна теорема двоїстості. Якщо існують допустимі рішення прямої та двоїстої задач, то для обох задач існують і оптимальні рішення причому виконується умова:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i = \min \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot y_j \,. \tag{5.4}$$

Якщо ж хоча б одна із задач не має допустимого рішення, то не одна із них не має оптимального рішення.

Рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot y_j \tag{5.5}$$

є необхідною та достатньою умовою оптимальності допустимих рішень $x_1,\ldots,x_n$ та $y_1,\ldots,y_m$ прямої та двоїстої задач відповідно.

Із теореми двоїстості витікають ряд положень із якими можна ознайомитись в [1-4] та іншій літературі із дослідження операцій та математичного програмування.

5.2 Економічна інтерпретація двоїстості

В залежності від виду ПЗ ЛП їй у відповідність може бути поставлена ДЗ. Причому економічний сенс прямої та двоїстої задачі буде вкрай тісно пов'язаними.

Розглянемо економічну інтерпретацію двоїстості на прикладі задачі оптимізації виробничої програми підприємства (ВПП) [5]. Пряма задача полягає у тому, що підприємство виробляє n видів продукції, одиниця кожного із видів продукції дає підприємству прибуток у розмірі c_i $(i=1..n)$. При виробництві продукції використовуються ресурси $j=1..m,$ у якості ресурсів можуть виступати сировина, кількість комплектуючих, фонд робочого часу обладнання і т.д. Ресурси обмежені величинами $b_1,...,b_m$. Норми витрат сировини на виробництво одиниці продукції кожного виду визначаються величинами $a_{11},...,a_{mn}$. Необхідно розподілити обмежені ресурси таким чином, щоб прибуток підприємства був максимальним.

Задача містить n КЗ, економічним сенсом яких будуть об'єми випуску продукції кожного виду. Сума КЗ помножених на прибуток c_i, який дає підприємству одиниця продукції i-го виду, складатиме ЦФ, що максимізується:

$$f(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \to \max. \qquad (5.6)$$

Використання ресурсів будуть відображати обмеження виду:

$$a_{j1}\cdot x_1 + a_{j2}\cdot x_{12} + ... + a_{ji}\cdot x_i + ... + a_{jn}\cdot x_n \le b_j. \qquad (5.7)$$

Економічний сенс обмежень виду (5.7) полягає у тому, що використання ресурсу, яке показує ліва частина обмеження (ЛЧО), має бути меншою чи дорівнювати його найбільшій доступній кількості b_j.

При приведенні оптимізаційної задачі до канонічної форми до ЛЧО (5.7) додамо керовану змінну $x_{(n+j)}$. Економічним сенсом змінної $x_{(n+j)}$ буде кількість ресурсу $j,$ який залишиться після виконання оптимальної виробничої програми. Очевидно, що $x_{(n+j)}=0$ при $a_{j1}\cdot x_1 + a_{j2}\cdot x_{12} + ... + a_{ji}\cdot x_i + ... + a_{jn}\cdot x_n = b_j$, тобто якщо ресурс j використовується в повному обсязі при реалізації оптимальної виробничої програми (дефіцитний). Враховуючи вищесказане запишемо задачу оптимізації виробничої програми в канонічній формі:

$$f(x_1,\dots,x_n,x_{(n+1)},\dots,x_{(n+m)}) = c_1 \cdot x_1 + \dots + c_n \cdot x_n + 0 \cdot x_{(n+1)} +$$
$$+ \dots + 0 \cdot x_{(n+m)} \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n + x_{(n+1)} + 0 \cdot x_{(n+2)} + \dots + 0 \cdot x_{(n+m)} = b_1; \\ a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2n} \cdot x_n + 0 \cdot x_{(n+1)} + x_{(n+2)} + \dots + 0 \cdot x_{(n+m)} = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ a_{j1} \cdot x_1 + \dots + a_{jn} \cdot x_n + 0 \cdot x_{(n+1)} + + \dots + x_{(n+j)} + \dots + 0 \cdot x_{(n+m)} = b_j; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n + 0 \cdot x_{(n+1)} + \dots + x_{(n+m)} = b_m; \\ x_i \ge 0; \quad i = 1..n; \quad j = 1..m. \end{cases} \tag{5.8}$$

Тоді ДЗ до (5.8) буде задача виду (5.9). Очевидно, що останні три нерівності системи (5.9) є умовами невід'ємності КЗ $(y_1,\dots,y_m)$ ДЗ.

$$z(y_1,\dots,y_m) = \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot y_j \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot y_1 + \dots + a_{m1} \cdot y_m \ge c_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ a_{1i} \cdot y_1 + \dots + a_{mi} \cdot y_m \ge c_i; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ a_{1n} \cdot y_1 + \dots + a_{mn} \cdot y_m \ge c_n; \\ 1 \cdot y_1 + \dots + 0 \cdot y_m \ge 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ 0 \cdot y_1 + \dots + 1 \cdot y_j + \dots + 0 \cdot y_m \ge 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ 0 \cdot y_1 + \dots + 1 \cdot y_m \ge 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Економічний сенс КЗ $(y_1,\dots,y_m)$ ДЗ до задачі оптимізації ВПП визначимо виходячи із основної теореми двоїстості, а саме із умови (5.5). Ліва частина рівняння (5.5) $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$ являє собою прибуток, який отримає підприємство при реалізації оптимальної виробничої програми. Права частина рівняння (5.5) $\sum_{j=1}^{m} b_j \cdot y_j$ буде сумарною оцінкою усіх ресурсів, використаних підприємством при реалізації оптимальної виробничої програми. Як було сказано вище $b_1,...,b_m$ максимально доступні для підприємства кількості ресурсів кожного виду. Тоді економічним сенсом КЗ $(y_1,...,y_m)$ ДЗ буде специфічна характеристика цінності кожного ресурсу для підприємства. У вітчизняній літературі [1, 3 та ін.] для $(y_1,...,y_m)$ використовується назви оптимальні (двоїсті) оцінки чи об'єктивно обумовлені оцінки. В іноземній літературі [2] найчастіше використовується назва тіньова ціна. Так як наш курс орієнтований на використання комп'ютерних засобів рішення задач МП, зокрема надбудови «Пошук рішення» Microsoft Excel, далі будимо використовувати термін «тіньова ціна».

Тіньові ціни $(y_1,...,y_m)$ ресурсів визначають ступінь дефіцитності ресурсів. У відповідності із оптимальним планом виробництва дефіцитні, тобто ті ресурси, що повністю використовуються, отримують ненульові оцінки, а недефіцитні – нульові оцінки.

Потрібно чітко розуміти різницю між зовнішніми цінами, відомими як правило до початку виробництва, та внутрішніми тіньовими цінами, що визначаються безпосередньо у результаті рішення оптимізаційної задачі.

Розглянемо також економічну інтерпретацію обмежень ДЗ на прикладі оптимізації ВПП. Величина $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot y_j$ є оцінкою вартості усіх ресурсів, що витрачаються для забезпечення випуску одиниці продукції i-го виду, а величина c_i – прибуток від реалізації продукції i-го виду. Очевидно, що прибуток підприємству будуть забезпечувати лише ті види продукції для яких виконується умова:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot y_j \le c_j, \qquad (5.10)$$

З огляду на обмеження оптимізаційної моделі (5.9), для видів продукції, що увійшли в оптимальне рішення, величина:

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot y_j - c_j, \qquad (5.11)$$

має дорівнювати нулю.

Для збиткових видів продукції, у випадку максимізації ЦФ, величина z_i від'ємна. Величина z_i отримала назву нормованої або приведеної вартості.

Економічну інтерпретацію двоїстості ми розглянули на прикладі задачі оптимізації ВПП. Однак ДЗ може бути побудована для багатьох інших задач МП. Таким чином, тіньова ціна та нормована вартість є важливим інструментом аналізу чутливості рішення оптимізаційної задачі.

Запитання для самостійної перевірки знань:

1. Оптимізаційні моделі прямої та двоїстої задач.
2. Вимоги до канонічної форми запису моделі задачі ЛП.
3. Правила перетворення ПЗ в ДЗ.
4. Основна теорема двоїстості.
5. Економічна інтерпретація змінних ДЗ на прикладі оптимізації ВПП.
6. Економічна інтерпретація обмежень ДЗ на прикладі оптимізації ВПП.

Список використаної літератури

1. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б А Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш Кремера. – М: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
2. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
3. Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Экономика», 1975. – 700 с.
4. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad: учебное пособие. 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 352 с.
5. Методичні вказівки до розрахункового завдання «Оптимізація виробничої програми підприємства» за розділом «Оптимізаційні методи і моделі» курсу «Економіко-математичне моделювання» для студентів очної та заочної форми навчання спеціальностей 6.030601 «Менеджмент», 6.030501 «Економіка підприємства», 6.030509 «Облік та аудит», 6.030507 «Маркетинг», 6.030507 «Інтелектуальна власність» / Уклад. О.Є. Скворчевський, В.Л. Товажнянський, Р.О. Побережний. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – 36 с.

ТЕМА 6. ЧУТЛИВІСТЬ РІШЕННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

6.1. Поняття чутливості рішення задачі ЛП

На практиці багато економічних параметрів (ціни на продукцію і сировину, запаси сировини, попит на ринку, заробітна платня і т. д.) з часом змінюють свої значення. Все це може призвести до зміни числових характеристик оптимізаційної моделі (ЦК, ПЧО, коефіцієнтів при КЗ в обмеженнях). Тому оптимальне рішення задачі ЛП, отримане для конкретної економічної ситуації, після її зміни може виявитися непридатним або неоптимальним. У зв'язку з цим виникає необхідність аналізу його чутливості до зміни числових характеристик оптимізаційної моделі.

Чутливість оптимального рішення – ступінь зміни екстремального значення ЦФ в результаті незначних змін числових характеристик ОМ. Тут необхідно зауважити, що чутливість оптимального рішення задачі доцільно оцінювати лише при незначних змінах числових характеристик ОМ, при суттєвій їх зміні потрібно шукати нове оптимальне рішення.

Теоретичною основою аналізу чутливості рішення задач ЛП є теорія двоїстості (див. тему 5). В рамках даної теми розглянемо положення аналізу чутливості рішення задач ЛП, що випливають з теорії двоїстості.

6.2 Характеристики обмежень задач ЛП

За ступенем впливу на оптимальне рішення обмеження поділяються на зв’язуючі та незв’язуючі.

Зв’язуючі обмеження – обмеження, незначнії зміни числових характеристик яких призводять до зміни екстремального значення ЦФ. Це пов’язано з тим, що зв’язуючі обмеження безпосередньо визначають оптимальне рішення.

Незв’язуючі обмеження – обмеження, незначнії зміни числових характеристик яких не призводять до зміни екстремального значення ЦФ, тому що вони не визначають безпосередньо оптимальне рішення.

Також в літературі зустрічаються назви жорсткі та нежорсткі обмеження. В термінології звітів надбудови «Пошук рішення» Microsoft Excel 2010 та наступних версій зв’язуючі обмеження називаються «з прив’язкою», а не зв’язуючі – «без прив’язки».

Незв’язуючі обмеження поділяються на ті, що визначають ОДЗ КЗ та **надлишкові** – обмеження, виключення яких не впливає на ОДЗ КЗ.

Ресурс (запаси сировини, фонд робочого часу обладнання і т.д.), що математично представляється зв'язуючим обмеженням, називають **дефіцитним**, а ресурс, що представляється незв'язуючим обмеженням, – **недефіцитним**.

Для кращого розуміння характеристик обмежень задач ЛП вдамося до графічного методу. На рис. 4.2 (тема 4) зв'язуючими обмеженнями є II та V, оскільки вони безпосередньо визначають точку оптимуму. Відповідно незв'язуючими є обмеження I, III, IV, причому I та IV є надлишковими обмеженнями. Виключення із задачі обмежень I та IV не вплине на конфігурацію багатокутника допустимих рішень, а от же і на ОДЗ КЗ.

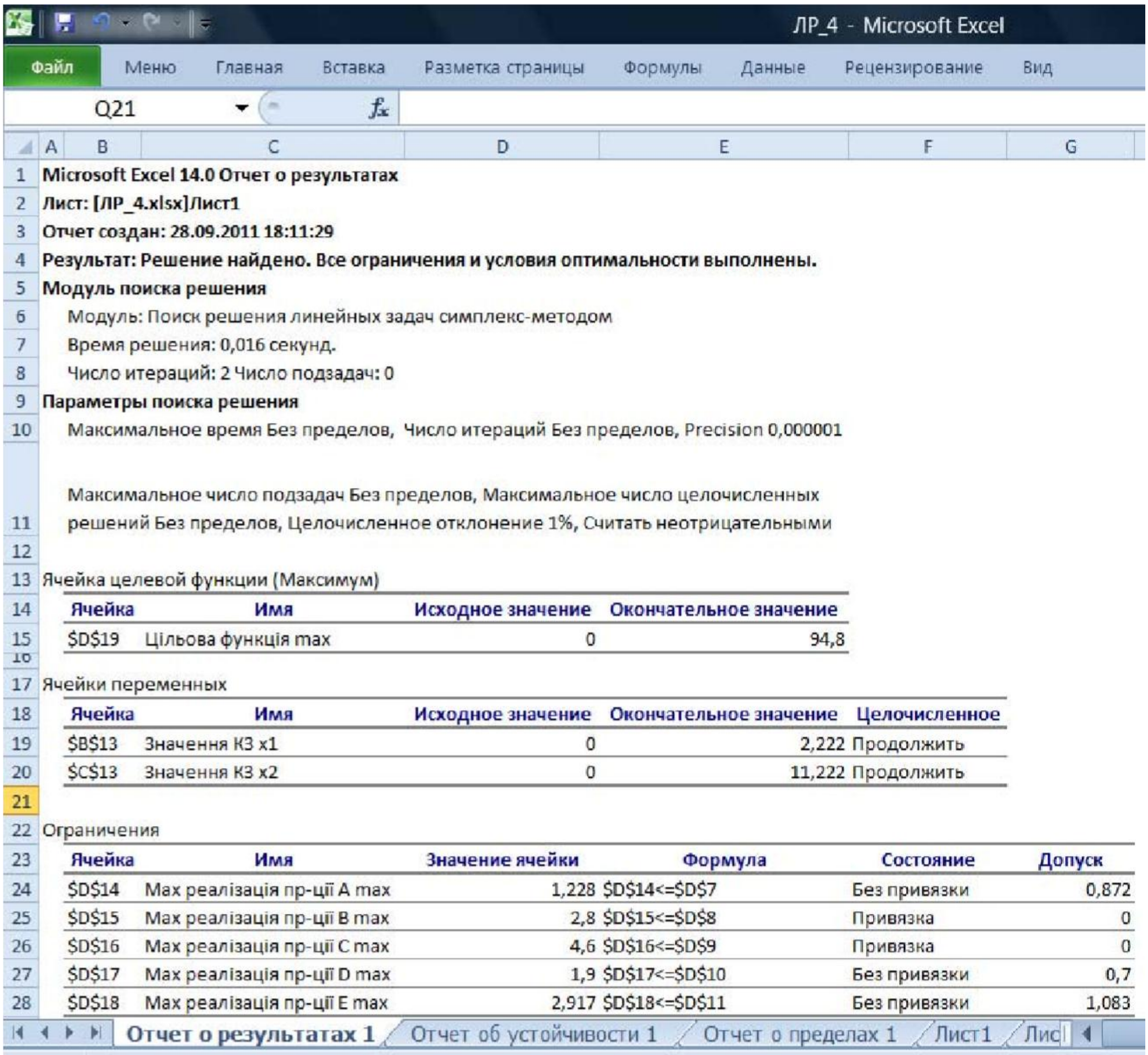
Графічна інтерпретація ефективна лише для задач із двома КЗ. Для задач ЛП із довільною кількістю КЗ найбільш доступним засобом аналізу чутливості, зокрема визначення впливу обмежень на оптимальне рішення, є надбудова «Пошук рішення» Microsoft Excel.

6.3 Аналіз чутливості рішення задач ЛП за звітами надбудови «Пошук рішення» Microsoft Excel

<u>6.3.1 Звіт про результати</u>

Приклад звіту про результати наведений на рис. 6.1. Початок звіту містить його назву, дату та час створення, метод рішення, тривалість та кількість ітерацій, інші характеристики рішення задачі. Перша таблиця містить інформацію про вихідне та остаточне значення ЦФ. Наступна таблиця показує вихідні та остаточне значення КЗ. Результуюче значення ЦФ та КЗ можна також дізнатися із розрахункової таблиці.

Остання, третя таблиця показує результати оптимального рішення для обмежень. В графі «Значення комірки» наводяться значення ЛЧО. В графі «Формула» показано тип обмежень. В графі «Стан» зв'язуючі обмеження характеризуються як «прив’язка», а не зв'язуючі – «без прив’язки». В графі «Допуск» наведена різниця між правою та лівою частиною кожного з обмежень. Якщо економічним змістом обмеження буде певний ресурс, то у графі «Допуск» вказана <u>залишкова кількість ресурсу</u>, якщо на нього накладено обмеження типу «≤», або <u>кількість ресурсу</u>, <u>на котрий була перевищена мінімально необхідна норма</u>, якщо накладено обмеження «≥».



Microsoft Excel 14.0 Отчет о результатах
Лист: [ЛР_4.xlsx]Лист1
Отчет создан: 28.09.2011 18:11:29
Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Модуль поиска решения
Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом
Время решения: 0,016 секунд.
Число итераций: 2 Число подзадач: 0
Параметры поиска решения
Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001
Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$D$19	Цільова функція max	0	94,8

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$13	Значення КЗ x1	0	2,222	Продолжить
$C$13	Значення КЗ x2	0	11,222	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$D$14	Max реалізація пр-ції A max	1,228	$D$14<=$D$7	Без привязки	0,872
$D$15	Max реалізація пр-ції B max	2,8	$D$15<=$D$8	Привязка	0
$D$16	Max реалізація пр-ції C max	4,6	$D$16<=$D$9	Привязка	0
$D$17	Max реалізація пр-ції D max	1,9	$D$17<=$D$10	Без привязки	0,7
$D$18	Max реалізація пр-ції E max	2,917	$D$18<=$D$11	Без привязки	1,083

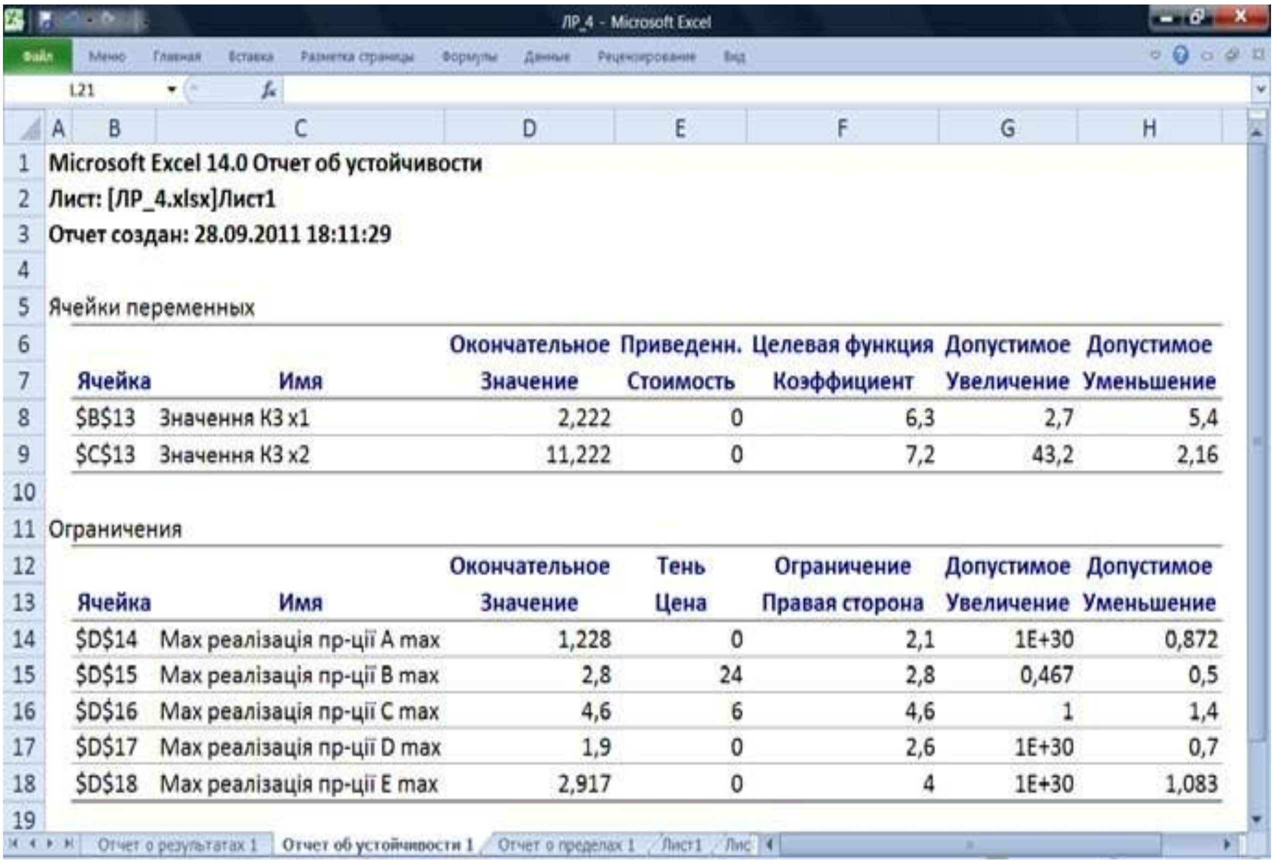
Рисунок 6.1 – Звіт про результати

6.3.2 Звіт про стійкість

Більш правильною назвою звіту про стійкість була б назва – звіт про чутливість. Така неточність, найімовірніше, була викликана неоднозначністю перекладу слова «sensitivity». Приклад даного звіту наведений на рис. 6.2.

В графі «Остаточне рішення» наведені значення КЗ, що доставляють екстремум ЦФ.

Більш розповсюдженою назвою наступної графи «Приведена вартість» є назва «нормована вартість». **Нормована вартість (НВ)** – показник, що характеризує зміну значення ЦФ при примусовому внесенні до оптимального плану однієї одиниці КЗ, що не увійшла в оптимальне рішення. Включення збиткових КЗ в оптимальне рішення буде погіршувати результат, тобто у випадку максимізації ЦФ НВ від'ємна, у випадку мінімізації – позитивна.



Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости
Лист: [ЛР_4.xlsx]Лист1
Отчет создан: 28.09.2011 18:11:29

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$13	Значення КЗ x1	2,222	0	6,3	2,7	5,4
$C$13	Значення КЗ x2	11,222	0	7,2	43,2	2,16

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$D$14	Max реалізація пр-ції A max	1,228	0	2,1	1E+30	0,872
$D$15	Max реалізація пр-ції B max	2,8	24	2,8	0,467	0,5
$D$16	Max реалізація пр-ції C max	4,6	6	4,6	1	1,4
$D$17	Max реалізація пр-ції D max	1,9	0	2,6	1E+30	0,7
$D$18	Max реалізація пр-ції E max	2,917	0	4	1E+30	1,083

Рисунок 6.2 – Звіт про стійкість

При рішенні ряду оптимізаційних задач НВ деяких КЗ, що не увійшли в оптимальне рішення, дорівнює нулю. Така КЗ не призводить до погіршення значення ЦФ, вона просто не увійшла в дане оптимальне рішення. Причому в цьому випадку оптимізаційна задача має декілька оптимальних рішень (див. пункт 4.5 теми 4). Розглянута КЗ може увійти в інші рішення.

В прикладі, наведеному на рис. 6.2 нормована вартість дорівнює 0, оскільки обидві КЗ увійшли в оптимальне рішення задачі.

В графі «Цільова функція. Коефіцієнт» наведені ЦК, а поряд – допустиме їх збільшення чи зменшення у відповідних графах.

Допустиме збільшення та зменшення у першій таблиці звіту про стійкість показують, наскільки може бути збільшений чи зменшений ЦК, щоб оптимальне значення ЦФ залишилось незмінним, <u>при усіх інших фіксованих числових характеристиках ОМ</u>. Наприклад, значення ЦК c_1 при x_1 дорівнює 6,3. Його допустиме збільшення складає 2,7, а допустиме зменшення – 5,4, отже ЦК може змінюватися в межах:

$$(6{,}3-5{,}4) \le c_1 \le (6{,}3+2{,}7). \qquad (5.1)$$

Причому, якщо c_1 не виходить за вказані межі та абсолютно усі інші числові характеристики ОМ залишаться зафіксованими, то значення ЦФ не зміниться і буде становити 94,8.

Якщо допустимим збільшенням є число типу 1Е+30, це свідчить про можливість практично безкінечного збільшення відповідного ЦК, тобто до 1×10^{30}. Число типу 1Е–16 дорівнює 1×10^{-16}, як правило, це похибка обчислень, тобто комірка практично дорівнює нулю.

Наступна таблиця звіту про стійкість містить інформацію про обмеження. В графі остаточне значення наведені значення ЛЧО.

Тіньова ціна (ТЦ) – параметр, що розраховується лише для зв'язуючих обмежень, та показує наскільки зміниться екстремальне значення ЦФ при збільшенні правої частини відповідного зв'язуючого обмеження на одиницю.

За графою ТЦ можна визначити, праву частину якого із зв'язуючих обмежень, при інших рівних економічних умовах, доцільно змінювати насамперед. Так, у нашому випадку (рис. 6.2), збільшення ПЧО за максимальною реалізацією продукції *В* на одиницю, спричинить приріст максимального значення ЦФ на 24 одиниці. В той же час збільшення на одиницю ПЧО за максимальною реалізацією продукції *С* спричинить приріст ЦФ лише в 6 одиниць. З маркетингових міркувань найбільш вигідно збільшувати попит на продукцію *В*, тим самим збільшуючи праву частину відповідного обмеження. Однак при прийнятті управлінського рішення потрібно зважати і на інші фактори, що не були враховані при постановці та формалізації оптимізаційної задачі.

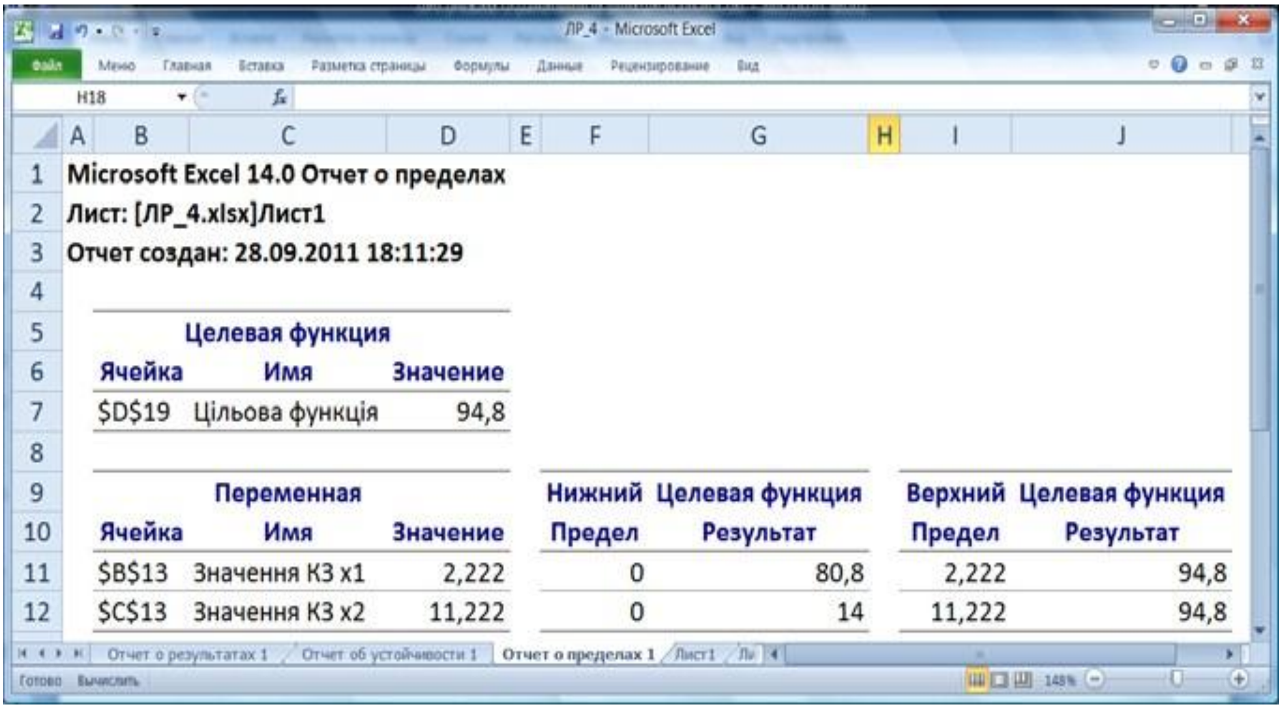
Далі у другій таблиці звіту про стійкість наводиться ПЧО та його допустимі збільшення і зменшення (рис. 6.2). Допустиме збільшення та зменшення у другій таблиці звіту по стійкості показують, наскільки може бути збільшена чи зменшена ПЧО, щоб оптимальне значення ЦФ залишилось незмінним при усіх інших фіксованих числових характеристиках ОМ.

Розрахунок меж, в яких можуть змінюватись ПЧО, так щоб при усіх інших фіксованих числових характеристиках ОМ оптимальне значення ЦФ залишилось незмінним, проводиться аналогічно таким розрахункам для ЦК.

6.3.2 Звіт про межі

Звіт про межі (рис.6.3) містить дві таблиці, перша з яких інформує про екстремальне значення ЦФ. Друга таблиця містить оптимальні значення КЗ, нижню і верхню межу КЗ та значення ЦФ при КЗ, рівній своїй нижній чи верхній межі.

Нижня (верхня) межа – це найменше (найбільше) значення, яке може приймати КЗ за умови, що обмеження ще виконуються, а значення решти змінних фіксовані на рівні оптимальних.



Microsoft Excel 14.0 Отчет о пределах
Лист: [ЛР_4.xlsx]Лист1
Отчет создан: 28.09.2011 18:11:29

Целевая функция		
Ячейка	Имя	Значение
$D$19	Цільова функція	94,8

Переменная			Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
$B$13	Значення КЗ х1	2,222	0	80,8	2,222	94,8
$C$13	Значення КЗ х2	11,222	0	14	11,222	94,8

Рисунок 6.3 – Звіт про межі

В графах «Цільова функція. Результат» представлено значення ЦФ, коли значення КЗ дорівнює її нижній чи верхній межі.

Таким чином, звіти надбудови «Пошук рішення» Microsoft Excel є достатньо інформативним засобом аналізу чутливості рішення задач ЛП. Потрібно пам’ятати, що аналіз чутливості ефективний лише при незначних змінах числових характеристик оптимізаційної моделі. При суттєвих їх змінах потрібно шукати нове оптимальне рішення задачі ЛП. Аналіз чутливості є важливим етапом економічної інтерпретації рішення будь-якої оптимізаційної задачі, в цьому студенти можуть переконатися на прикладах виконання лабораторних робіт [6].

Запитання для самостійної перевірки знань:

1. Чим викликана необхідність аналізу чутливості рішення задач ЛП?
2. Дати визначення чутливість оптимального рішення.
3. Розкрити поняття зв'язуючи, незв'язуючи та надлишкові обмеження.
4. Як визначити дефіцитні та не дефіцитні ресурси.
5. Використання характеристик допустимих збільшень та зменшень ЦК та ПЧО при аналізі чутливості оптимального рішення.
6. Що в Microsoft Excel означають цифри типу 1E+30 та 1E–16.
7. Розкрити поняття «нормована вартість» та особливості її використання при аналізі чутливості.
8. Розкрити поняття «тіньова ціна» та особливості її використання при аналізі чутливості.
9. Коротко охарактеризувати основні складові звіту по результатам.
10. Коротко охарактеризувати основні складові звіту про стійкість.
11. Коротко охарактеризувати основні складові звіту про межі.

Список використаної літератури

1. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Таха, А. Хемди, 7-е изд.; пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

2. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.

3. Алесинская Т.В. Экономико-математические методы и модели. Линейное программирование : учебно-методическое пособие / Т.В. Алесинская, В.Д. Сербин, А.В. Катаев. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. – 79 с.

4. Белобродский А.В. Поиск решения с Excel 2000. Руководство по решению экстремальных задач в экономике. / А.В. Белобродский, М.А. Гриценко. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2001. – 76 с.

5. Кузьмичов А.І. Математичне програмування в Excel : навч. посіб. / А.І. Кузьмичов, М.Г. Медведєв. – К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2005. – 320 с.

6. Скворчевський О.Є. Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті : лаборатор. практикум з курсу «Економіко-математичне моделювання» / О.Є. Скворчевський, В.Л. Товажнянський. – Х. : НТУ «ХПІ», 2013. – 96 с.

ТЕМА 7. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

6.1 Класична модель транспортної задачі

Транспортна задача (ТЗ) – це задача розробки оптимального, за деяким критерієм (наприклад мінімуму транспортних витрат), плану перевезення продукції одного виду з декількох пунктів відправлення в кілька пунктів призначення. У випадку класичної ТЗ величина транспортних витрат прямо пропорційна обсягу перевезеної продукції і задається за допомогою тарифів на перевезення одиниці продукції.

Крім транспортних витрат критеріями оптимальності тут можуть бути:

- мінімізація загальної витрати палива в натуральному (л) і вартісному (грн.) вираженні;
- мінімізація загальної вантажної роботи (т·км);
- мінімізація загального пробігу автотранспорту (км);
- мінімізація сумарної тривалості транспортної роботи (годин) і ін.

ТЗ відносяться до двохіндексних задач ЛП, у яких КЗ будуть складати матрицю виду:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & x_{ij} & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}; \qquad (7.1)$$

де m – кількість пунктів призначення ($j = 1..m$); n – кількість пунктів відправлення ($i = 1..n$).

КЗ x_{ij} будуть характеризуватися двома індексами i – номер рядка, j – номер стовпчика. Саме тому подібні задачі отримали назву двоіндексних, на відміну від задач в яких КЗ складають вектор, в якому визначаються одним індексом (див. тему 4). Також існують багатоіндексні задачі ЛП, однак вони доволі складні. Їх рішення, як правило, потребує спеціальної математичної підготовки. Тому в рамках курсу «Оптимізаційні методи і моделі» будемо розглядати лише одно- та двоіндексні задачі ЛП.

Економічним змістом x_{ij} в класичній ТЗ буде кількість продукції, що перевозиться з пункту відправлення A_i до пункту призначення B_j.

Цільові коефіцієнти c_{ij} ТЗ задаються аналогічно КЗ у виді матриці:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & c_{ij} & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}; \qquad (7.2)$$

У випадку якщо критерієм оптимальності ТЗ є мінімум сумарних транспортних витрат, економічним змістом c_{ij} буде вартість одиниці вантажу, перевезеної з пункту відправлення A_i до пункту призначення B_j.

Запаси a_i продукції в пункті відправлення A_i та потреби b_j продукції в пункті призначення B_j задаються у вигляді відповідних векторів:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}; \qquad (7.3); \qquad\qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}; \qquad (7.4).$$

Вихідні дані ТЗ представляють у виді транспортної матриці (табл. 7.1).

Таблиця 7.1. – Загальний вид ТЗ

Пункти відправлення, A_i	Пункти призначення, B_j				Запаси
	B_1	B_2	$\dots$	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2m}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	c_{ij}	$\dots$	$\dots$
A_n	c_{n1}	c_{n2}	$\dots$	c_{nm}	a_n
Потреби	b_1	b_2	$\dots$	b_m	

Якщо, критерієм оптимальності ТЗ є сумарні транспортні витрати, то математично її можна сформулювати так: скласти таку матрицю X, щоб сумарні транспортні витрати $f(X)$ були мінімальними. Тоді ЦФ ТЗ матиме вигляд:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min, \qquad (7.5)$$

Також тут потрібно зазначити, що добуток $(c_{ij} \cdot x_{ij})$ є вартістю перевезення із пункту відправлення A_i в пункт призначення B_j.

Якщо сумарні запаси дорівнюють сумарним потребам, тобто виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j, \qquad (7.6)$$

то така ТЗ називається **збалансованою** або закритою.

Однак на практиці умова (7.6) виконується рідко.

Якщо сумарні запаси не дорівнюють сумарним потребам, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \neq \sum_{j=1}^{m} b_j, \qquad (7.7)$$

то така ТЗ називається **незбалансованою** або відкритою.

Основні обмеження класичної ТЗ будуть витікати з двох умов:

1) умова повного вивозу всього обсягу продукції з кожного пункту відправлення:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i; \qquad (7.8)$$

2) умова повного забезпечення продукцією кожного пункту призначення:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j; \qquad (7.9)$$

Очевидно, що умови (7.8) та (7.9) можуть виконуватись тільки у випадку збалансованої ТЗ. Якщо ТЗ незбалансована, її необхідно штучно привести до збалансованого вигляду.

У випадку, коли сумарні запаси перевищують сумарні потреби, необхідний додатковий **фіктивний пункт призначення**, що буде формально споживати існуючий надлишок запасів. Потреби фіктивного пункту призначення будуть розраховуватись за формулою:

$$a_{\phi} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j; \qquad (7.10)$$

Якщо сумарні потреби перевищують сумарні запаси, то необхідний додатковий **фіктивний пункт відправлення**, що формально задовольняє існуючий дефіцит продукції в пунктах відправлення. Запаси фіктивного пункту відправлення, будуть розраховуватись за формулою:

$$b_{\phi} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i; \qquad (7.11)$$

Фіктивні перевезення реально здійснюватись не будуть. **Економічний зміст фіктивних перевезень** буде наступним. Перевезення з реальних пунктів відправлення у фіктивний пункт призначення будуть показувати надлишки продукції, котрі залишилися в зазначених пунктах відправлення. Перевезення з фіктивного пункту відправлення в реальні пункти призначення покажуть обсяги продукції, недотримані зазначеними пунктами призначення.

Введення фіктивного пункту призначення або відправлення породжує необхідність формального завдання **фіктивних ЦК** (фіктивних тарифів) для фіктивних перевезень. Оскільки нас цікавить визначення найбільш вигідних із реальних перевезень, то необхідно передбачити, щоб при рішенні задачі фіктивні перевезення не розглядалися до того часу, доки не будуть визначені всі реальні перевезення. Для цього потрібно фіктивні перевезення зробити невигідними, щоб при пошуках рішення задачі вони розглядалися наприкінці. Таким чином, у випадку максимізації ЦФ, **величина фіктивних ЦК повинна значно перевищувати максимальний з реальних ЦК,** використаних у моделі, тобто:

$$c_{ij}^{ф} >> c_{ij}^{\max}. \qquad (7.12)$$

На практиці можливі ситуації, коли в певних напрямках перевезення продукції неможливі через різні форс-мажорні обставини (ремонт транспортних магістралей, погодні умови, страйки і т.д.). Такі ситуації моделюються за допомогою введення, так званих, **забороняючих ЦК** (забороняючих тарифів) $c_{ij}^{з}$. Забороняючі ЦК повинні зробити неможливими, тобто зовсім невигідними, перевезення у відповідних напрямках. Для цього, у випадку максимізації ЦФ, величина заборонних ЦК повинна значно перевищувати максимальний з реальних ЦК, що використовуються у моделі:

$$c_{ij}^{з} >> c_{ij}^{\max}. \qquad (7.13)$$

Умови (7.12) та (7.13) продиктовані тим, що в ТЗ цільова функція (7.5) мінімізується, що відповідає більшості критеріїв оптимальності ТЗ. У випадку максимізації ЦФ фіктивні чи забороняючі ЦК повинні бути значно меншими, ніж найменший з реальних ЦК.

Крім обмежень виду (7.8) і (7.9), як і в більшості задач МП, в економіці та менеджменті на КЗ в ТЗ накладаються обмеження невід'ємності КЗ:

$$x_{ij} \geq 0. \qquad (6.14)$$

Також в оптимізаційній моделі ТЗ, окрім основних (7.8), (7.9) і (7.14), можуть бути присутні специфічні обмеження пов'язані, наприклад, із цілочисельністю задачі, або із обов'язковим задоволенням потреб в певному пункті призначення тощо.

ЦФ (7.5) і обмеження (7.8), (7.9) і (7.14) запишемо у виді **оптимізаційної моделі ТЗ:**

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i; \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j; \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases} \qquad (6.15)$$

На сучасному етапі розвитку прикладної математики оптимізаційну модель, побудовану для конкретної ТЗ, доцільно вирішувати комп'ютерними засобами, що реалізують алгоритм симплекс-методу, наприклад за допомогою надбудови «Пошук рішення» Microsoft Excel.

7.2 Етапи побудови моделі класичної ТЗ

Як правило, рішення ТЗ відбувається за наступним алгоритмом:

1. Перевірка збалансованості задачі.

2. У випадку незбалансованої ТЗ додавання фіктивного пункту відправлення або пункту призначення із введенням фіктивних ЦК. Побудова транспортної матриці збалансованої задачі.

3. Перевірка реальної можливості здійснення перевезень, тобто відсутності форс-мажорних обставин, які перешкоджають перевезенням. При необхідності введення заборонних цільових коефіцієнтів.

4. Визначення матриці КЗ. У збалансованій транспортній задачі кількість КЗ буде дорівнювати $(n \times m)$.

5. Запис ЦФ, що відображає критерій оптимальності.

6. Накладення обмежень на КЗ.

7. Рішення задачі.

8. Аналіз чутливості рішення ТЗ.

9. Вироблення практичних рекомендацій на підставі рішення задачі та аналізу його чутливості.

7.3 Особливості аналізу чутливості рішення класичної ТЗ

Порівняно із одноіндексними задачами ЛП класична ТЗ має ряд особливостей, які особливо яскраво вирізняють себе на етапі аналізу її чутливості та економічної інтерпретації отриманих результатів [6]. Звернемо увагу на особливо актуальні моменти.

В класичній ТЗ величини нормованих вартостей, в звіті по стійкості, будуть позитивними, оскільки ЦФ мінімізується. Тобто при включені одиниці збиткової КЗ в оптимальний план мінімальне значення ЦФ збільшитися на величину нормованої вартості.

Економічним сенсом тіньових цін для класичної ТЗ будуть так звані **потенціали**, які дозволяють зробити висновок, як зміниться оптимальне значення ЦФ при зміні запасів у кожному із пунктів призначення та потреб у кожному із пунктів відправлення. Необхідно зауважити, що потенціали можуть бути, як позитивними так і відємними.

7.4 Інші види задач транспортній сфері

У рамках даної теми була розглянута класична ТЗ в якій приймається, що витрати (або інша величина, що віддзеркалює критерій оптимальності) прямо пропорційна об'єму перевезень. Однак на практиці дуже часто ця умова не виконується. Наприклад, при перевезенні залізничним транспортом деяких видів вантажу ставки на перевезення залежать від його вагової категорії. У деяких випадках при завантаженні вагона повністю ставка на перевезення менша, ніж при неповному завантаженні вагона. Вартість перевезення вантажу автомобільним транспортом теж залежить від об'єму перевезень. Цікаві науково-практичні задачі ставлять комбіновані (залізничні з автомобільними) перевезення. Крім того, в класичній ТЗ приймається, що здійснюються перевезення лише одного виду продукції, ця умова на практиці також, як правило, не виконується.

Таким чином, реальні оптимізаційні задачі, що можуть виникати на транспортній сфері, є достатньо складними. На сьогодні сформувався окремий науково-практичний напрямок, метою якого є раціональна організація транспортування вантажів, у тому числі і на основі оптимізаційних методів. Цей науково-практичний напрямок отримав назву **транспортна логістика**.

Запитання для самостійної перевірки знань:

1. Дати визначення класичної ТЗ.
2. Вказати найбільш розповсюджені критерії оптимальності в ТЗ.
3. Розкрити сутність понять одно-, двох- та багато індексні задачі ЛП.
4. Економічний зміст КЗ класичної ТЗ.
5. Структура та складові транспортної матриці.
6. Цільова функція та цільові коефіцієнти класичної ТЗ. Їх зв'язок із критерієм оптимальності.
7. Визначення вартості перевезень в кожному із напрямків.
8. Вказати відмінності збалансованої та незбалансованої ТЗ.
9. Приведення незбалансованої ТЗ до збалансованого вигляду.
10. Економічний сенс фіктивних перевезень.
11. Застосування та принцип вибору значень фіктивних та забороняючих тарифів.
12. Оптимізаційна модель класичної ТЗ в загальній постановці.
13. Етапи побудови моделі класичної ТЗ.
14. Особливості аналізу чутливості рішення класичної ТЗ.
15. Інші види задач транспортній сфері.

Список використаної літератури

1. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Таха, А. Хемди, 7-е изд.; пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

2. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.

3. Алесинская Т.В. Экономико-математические методы и модели. Линейное программирование : учебно-методическое пособие / Т.В. Алесинская, В.Д. Сербин, А.В. Катаев. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. – 79 с.

4. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – 2-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 208 с.

5. Миротина Л.Б. Транспортная логистика. – М.: Экзамен, 2003. – 512 с.

6. Скворчевський О.Є. Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті : лаборатор. практикум з курсу «Економіко-математичне моделювання» / О.Є. Скворчевський, В.Л. Товажнянський. – Х. : НТУ «ХПІ», 2013. – 96 с.

ТЕМА 8. ЗДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Задачі про призначення – задачі МП, що мають на меті оптимальне за деяким критерієм розподілення n ресурсів по m роботах, причому для виконання кожної роботи потрібен один і лише один ресурс, а кожен ресурс може бути використаний на одній і тільки одній роботі.

Задачі про призначення мають місце при призначенні співробітників по посадах, водіїв на машини, автомобілів на рейси, при розподіленні академічних груп по аудиторіях, наукових тем по науково-дослідним центрам, цілей між вогневими засобами у військовій справі тощо. Наприклад, при вирішенні задачі розподілення співробітників по посадах, у якості ресурсів будуть виступати співробітники, а у якості робіт – посади.

За формальними математичними ознаками (зведення вихідних даних у матрицю задачі про призначення, вигляд оптимізаційної моделі) задачі про призначення часто розглядають, як специфічний тип ТЗ. Із точки зору автора, такий погляд не завжди справедливий через суттєві відмінності у формулюванні оптимізаційної моделі, послідовності їх рішення, а головне економічної сутності задач.

Задачі про призначення, зазвичай, відносяться до так званих двохіндексних задач МП, тому їх КЗ та ЦК будуть складати матриці:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & x_{ij} & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}; \qquad (8.1)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & c_{ij} & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}. \qquad (8.2)$$

де x_{ij} – керовані змінні;

c_{ij} – цільові коефіцієнти;

n – кількість ресурсів ($i = 1..n$);

m – кількість робіт ($j = 1..m$).

Економічним сенсом КЗ задачі про призначення буде інформація про те, чи призначений i-й ресурс на j-у роботу, тому в цих задачах КЗ є бінарними:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}. \qquad (8.3)$$

Бінарною змінною називається змінна у котрої область допустимих значень складається лише із двох об'єктів «істина» та «фальш». Наприклад, стверджується, що i-й співробітник призначений на j-у посаду, якщо змінна $x_{ij} = 1$ – дане твердження істинне, якщо $x_{ij} = 0$ – дане твердження фальшиве.

Бінарні змінні також називаються двоїстими або бульовими. В надбудові «Пошук рішення» Microsoft Excel 2003, 2007 використана назва – двоїсті змінні, а в Microsoft Excel 2010 – бінарні змінні.

Таким чином задачі про призначення відносяться до класу задач дискретного програмування.

Дискретне програмування (Дис.П) – розділ МП в котрому КЗ можуть приймати лише дискретні значення, наприклад бульові.

Умова, що для виконання кожної роботи потрібен один і лише один ресурс, а кожен ресурс може бути використаний на одній і тільки одній роботі призводить до того, що в кожному стовпчику та рядку матриці КЗ (8.1) може бути лише одна змінна із значенням $x_{ij} = 1$, а усі інші мають дорівнювати 0. Математично це можна сформулювати так:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \qquad (8.4) \qquad\qquad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1. \qquad (8.5)$$

Наявність обмежень (8.3)-(8.5) робить необхідним для рішення задачі умову рівності кількості ресурсів та кількості робіт. Тобто **умовою збалансованості** задачі про призначення є $n = m$. При необхідності цього можна досягти шляхом введення фіктивних ресурсів чи робіт. Таким чином кількість змінних у **збалансованій задачі** про призначення буде $(n \times m)$, а кількість обмежень виду (8.4) та (8.5) – $(n+m)$, також в обмеженнях вказується, що змінні бульові.

Економічним сенсом ЦК c_{ij} у випадку розподілення співробітників по посадах, може бути оцінка компетентності кожного із співробітників для роботи на кожній із посад. Це пов’язане із тим, що критерієм оптимальності задачі буде максимальна сумарна загальна компетентність усіх співробітників призначених на певні посади. ЦФ задачі про призначення може мати вигляд:

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}\cdot x_{ij}\rightarrow \max. \tag{8.6}$$

В інших видах задач про призначення економічний сенс ЦК та критерій оптимальності будуть іншими, тим не менш, вид (8.6) ЦФ скоріше за все збережеться. Однак, необхідно пам’ятати, що у задачах про призначення напрямком оптимізації може бути як максимізація так і мінімізація. Наприклад в задачі розподілення співробітників по посадах може мінімізуватися загальний фонд заробітної платні.

Приведення задачі про призначення до збалансованого вигляду $(n=m)$ вимагає застосування фіктивних ЦК для фіктивних ресурсів чи робіт. Значення фіктивних ЦК обираються у залежності від напрямку оптимізації задачі про призначення. При цьому керуються принципом невигідності фіктивних призначень, так щоб вини розглядалися в останню чергу. Тобто, якщо ЦФ мінімізується, то значення фіктивних ЦК обираються значно більшими, ніж найбільший із реальних ЦК:

$$c_{ij}^{ф}>>c_{ij}^{\max}. \tag{8.7}$$

Якщо ж ЦФ максимізується – значення фіктивних ЦК обираються значно меншими, ніж найменший із реальних ЦК:

$$c_{ij}^{ф}<<c_{ij}^{\min}. \tag{8.8}$$

Вихідні дані задач, що розглядаються, доцільно представляти у вигляді матриці задачі про призначення (табл. 8.1).

Таблиця 8.1 – Матриця задачі про призначення

Ресурси, A_i	Роботи, B_j				Кількість ресурсів
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	1
…	…	…	c_{ij}	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	1
Кількість робіт	1	1	…	1	

ЦФ (8.6) та обмеження (8.3)-(8.5) запишемо у вигляді оптимізаційної моделі задачі про призначення:

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}\cdot x_{ij}\to \max(\min);$$
$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=1;\ \sum\limits_{j=1}^{m}x_{ij}=1;\\ x_{ij}=\begin{cases}0\\1\end{cases}.\end{cases}\tag{8.9}$$

Традиційним методом рішення задач про призначення є так званий угорський метод запропонований у 1934 році угорським математиком Егерварі і заново відкритий у 1953 році американським математиком Куном. Угорський метод можна розглядати як аналог симплекс-методу. Який за меншу кількість ітерацій, порівняно із симплекс-методом, дозволяє отримати рішення дискретної ТЗ чи задачі про призначення.

Широке розповсюдження потужних ЕОМ призвело до втрати принциповості критерію обчислювальної складності при виборі методу рішення задач МП. Тому сьогодні для рішення дискретних задач МП, зокрема задач про призначення доцільно використовувати сімплекс-метод, реалізований у багатьох комп’ютерних програмах. Найбільш відомою та розповсюдженою із таких програм є надбудова «Пошук рішення» Microsoft Excel.

Окрім обмежень, наведених в моделі (8.9) в ОМ можуть вводитися інші обмеження, які моделюють систему переваг та пріоритетів при підборі та розподіленні персоналу на підприємстві. Також вказані пріоритети та переваги можуть моделюватися шляхом використання забороняючих ЦК, значення яких обираються за тим же принципом, як і значення фіктивних ЦК.

Тим не менш, задачі про призначення можуть розглядатися лише як хороший допоміжний засіб при розподіленні певної кількості ресурсів по певній кількості робіт. Останнє слово має належати не комп’ютеру, який вирішує задачу, а людині яка приймає управлінське рішення. Особливо це стосується задач управління персоналом, де потрібно враховувати людський фактор, морально-етичні норми, норми соціального захисту співробітників тощо.

Запитання для самостійної перевірки знань:

1. Дати визначення та вказати сфери застосування задач про призначення.
2. Що собою являють бінарні змінні?
3. Охарактеризувати дискретне програмування, як розділ МП.
4. Умова збалансованості задачі про призначення. Приведення незбалансованої задачі про призначення до збалансованого вигляду.
5. Принцип вибору фіктивних ЦК в задачах про призначення.
6. Матриця задачі про призначення.
7. ОМ задачі про призначення в загальній постановці.
8. Особливості практичного застосування задач про призначення.

Список використаної літератури:

1. Таха Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 219 с.

2. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.

3. Алексинская Т.В., Сербин В.Д., Катаев А.В. Учебно-методическое пособие по курсу «Экономико-математические методы и модели. Линейное программирование». Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. – 79 с.

ТЕМА 9. ОСНОВИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

9.1. Поняття нелінійного програмування

В значній кількості економічних задач оптимізаційну модель не можна сформулювати таким чином, щоб вона була придатна для рішення засобами ЛП. В таких задачах КЗ зв'язані нелінійними залежностями, що призводить до нелінійності ЦФ і (або) обмежень.

Нелінійне програмування (НП) – розділ МП, що вивчає теорію та практичні методи формулювання і рішення оптимізаційних задач із нелінійною ЦФ і (або) нелінійними обмеженнями.

У загальному виді оптимізаційної моделі задача НП може бути сформульована так:

$$
\begin{gathered}
f(x_1,\ldots,x_n) \to \max; \\
\begin{cases}
g_1(x_1,\ldots,x_n) \le b_1; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\
g_j(x_1,\ldots,x_n) \ge b_j; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\
g_m(x_1,\ldots,x_n) = b_m; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\
x_i \ge 0.
\end{cases}
\end{gathered}
\qquad (9.1)
$$

де $(x_1,\ldots,x_n)$ – КЗ;

n – кількість КЗ $(i=1..n)$;

$g_j(x_1,\ldots,x_n)$ – функція обмежень (безперервно диференційована);

b_j – права частина (константа) обмеження;

m – кількість обмежень $(j=1..m)$.

В оптимізаційних моделях НП можуть використовуватись різні типи обмежень (рівності, суворі та несуворі нерівності), що показано на прикладі моделі (9.1). Наявність тих чи інших типів обмежень в оптимізаційній моделі диктується економічною суттю задачі, для якої вона розробляється.

НП є узагальненням ЛП на випадок наявності нелінійної ЦФ і (або) обмежень, в свою чергу, ЛП можна розглядати як окремий випадок НП. Саме тому значна частина базових положень ЛП залишається справедливою і для задач НП. Структура та суть оптимізаційних моделей задач ЛП та НП також значною мірою схожі.

Загальне формулювання оптимізаційної моделі задачі НП (9.1) подане на прикладі одноіндексної задачі. Окрім цього задачі НП, як і задачі ЛП, можуть бути двох- та багатоіндексні.

Однак, на відміну від монотонно зростаючих чи монотонно спадаючих лінійних функцій, нелінійні функції можуть мати екстремуми (окрім -∞ та +∞), що допускає проведення в НП оптимізації без обмежень – **безумовної оптимізації**. Натомість оптимізація при наявності обмежень називається **умовною оптимізацією.**

Задачі НП надзвичайно різноманітні, тому універсального методу для їх рішення немає. Найбільш розповсюдженими методами є наступні.

8.2. Методи рішення задач нелінійного програмування

8.2.1. Класичний метод визначення екстремуму засобами диференціального числення, незважаючи на свою відносну простоту, придатний для рішення лише обмеженої кількості задач НП, в основному задач із однією КЗ.

8.2.2 Метод кусково-лінійних наближень полягає у заміні нелінійної функції певною кількістю лінійних, із подальшим рішенням задачі методами ЛП. Даний метод знижує точність рішення задачі, може бути застосований лише для обмеженої кількості задач НП, а з появою комп'ютерів взагалі практично втратив свою актуальність.

8.2.3. Метод множників Лагранжа полягає в переході від задачі умовної оптимізації до задачі безумовної оптимізації шляхом зведення ЦФ та обмежень до однієї функції, що отримала назву функції Лагранжа:

$$L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m) = f(x_1,...,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot g_j(x_1,...,x_n); \qquad (9.2)$$

де $\lambda_1,...,\lambda_m$ – певні константи, що отримали назву множників Лагранжа.

Далі шляхом знаходження та прирівнювання до нуля частинних похідних за змінними $x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m$ знайдемо точки безумовного екстремуму функції (9.2) . Одна зі знайдених точок може бути точкою умовного екстремуму ЦФ.

В багатьох оптимізаційних задачах економічного характеру множники Лагранжа мають чітку економічну інтерпретацію, яка буде розглянута нижче.

8.2.4 Градієнтні методи – методи засновані на пошуку екстремуму функції шляхом покрокового переходу до нього за допомогою її градієнту.

Градієнтні методи рішення задач НП включають в себе багато різновидів та є найбільш розповсюдженими. До них відносяться метод найшвидшого спуску, метод покоординатного спуску, метод сполучених градієнтів, метод узагальненого приведеного градієнта та ін. Вони засновані на ідеї покрокового наближення до екстремуму ЦФ шляхом послідовного обчислення градієнта цієї функції, починаючи з деякої початкової точки. Точка, перехід від якої до точки з більшим (меншим) значенням неможливий, алгоритмом градієнтних методів вважається результатом рішення задачі НП.

Градієнтом функції $f(x_1,...,x_n)$ є вектор із компонентами $\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ направлений у бік найбільшого зростання функції f :

$$grad(f) = \nabla(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \vec{e}_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \vec{e}_n. \qquad (9.3)$$

де $\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ – часні похідні по змінним $x_1,...,x_n$.

$\vec{e}_1,...,\vec{e}_n$ – одиничні вектори вісей координат (орти).

Позначення $grad$ чітко ідентифікує градієнт функції, в той час як через оператор набла ∇ можуть виражатися дивергенція, ротор та інші операції векторного аналізу.

Сьогодні алгоритми градієнтних методів реалізовані багатьма програмами, наприклад Microsoft Excel та Mathcad, які автоматизують працемісткі ітераційні розрахунки. Таким чином, основною задачею дослідника економіста стає коректна формалізація оптимізаційної задачі та введення її в комп’ютерну програму для подальшого рішення. Тому не будемо глибоко розглядати алгоритми методів рішення задач НП, а перейдемо до особливостей їх формалізації.

9.3. Опукле програмування та багатоекстремальні задачі

Вирішуючи задачі НП потрібно чітко розуміти різницю між локальним та глобальним екстремумом функції.

Глобальним екстремумом функції $f(X)$ на області D називається точка X^* заданої області, в якій функція приймає своє найбільше (глобальний максимум) або найменше (глобальний мінімум) значення серед усіх $X \in D$, тобто для глобального максимуму виконується умова (9.4), а для глобального мінімуму – умова (9.5).

$$f(X^*) \geq f(X), \quad (9.4) \qquad f(X^*) \leq f(X), \quad (9.5) \qquad \text{для усіх } X \in D.$$

Якщо нерівності (9.4) та (9.5) суворі, то кажуть про суворий глобальний екстремум.

Локальним екстремумом функції $f(X)$ на області D називається точка X^{**} заданої області, в якій функція приймає своє найбільше (глобальний максимум) або найменше (глобальний мінімум) значення серед усіх X що лежать в безпосередній близькості від точки X^{**}.

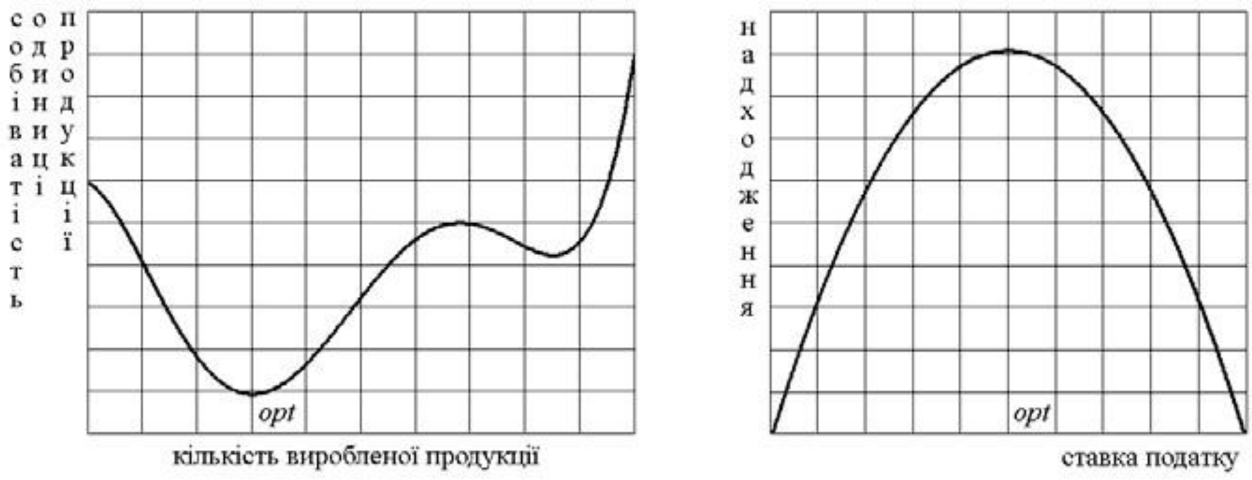
Більшість економічних задач НП зводиться до задач пошуку глобального екстремуму, умови його існування визначає теорема Веєрштрасса.

Теорема Веєрштрасса: якщо область D замкнута і обмежена, то функція $f(X)$, що може бути диференційована, досягає в цій області своїх найбільшого і найменшого значень або в стаціонарній точці, або в граничній точці області D.

Стаціонарною точкою називають точку в якій усі частинні похідні функції $f(X)$ дорівнюють нулю.

В залежності від того, чи має функція $f(X)$ декілька чи один екстремум на області D, вона буде називатись **багатоекстремальною** чи **унімодальною** відповідно. Прикладом багатоекстремальної функції в економіці може бути залежність витрат підприємства від кількості виробленої продукції (рис. 9.1 а), а прикладом унімодальної функції – крива Лафєра (рис. 9.1 б).

Якщо при оптимізації ми працюємо з унімодальною функцією, то така задача відноситься до **опуклого програмування**. Задачі опуклого програмування вирішуються достатньо легко одним із наведених вище методів. Результат рішення задачі опуклого програмування, як правило, не залежить від початкових умов, тобто тих значень КЗ, із яких починається перша ітерація, наприклад, методу узагальненого приведеного градієнту.



а *б*

Рисунок 9.1 – Графіки багатоекстремальної та унімодальної функцій

Натомість знайти справді оптимальне рішення багатоекстремальної задачі достатньо складно, особливо коли дослідник не має уявлення про її форму. Це пов’язано із тим, що результат рішення може залежати від значень КЗ, із яких починається перша ітерація обчислень, наприклад, одним із градієнтних методів. Через обмеженість кроку, з яким обчислюється градієнт функції, точка локального екстремуму може бути видана, як результат рішення оптимізаційної задачі. В той же час на області визначення функції може бути глобальний екстремум, що буде забезпечувати краще рішення оптимізаційної задачі.

Таку ситуацію легко наочно пояснити на прикладі графіка поліноміальної функції, що описує залежність собівартості одиниці продукції від кількості виробленої продукції (рис. 9.1 а). Припустимо, що областю визначення функції, в умовах даної задачі, є та її частина, що показана на рис. 9.1 а. На цій області визначення ми маємо два мінімуми. Якщо при використанні алгоритму одного з градієнтних методів у якості початкової точки оберемо ліву границю, то результатом рішення буде глобальний мінімум. Якщо праву границю – локальний мінімум. Очевидно, що останнє рішення нас не задовольнить.

Таким чином результат рішення багатоекстремальних задач НП, значною мірою, визначається початковими умовами. Здійснити вдалий вибір початкових умов є достатньо складною проблемою. Іноді це можна здійснити на основі попередніх знань про форму функції та місцезнаходження точок потенційного оптимуму, іноді вдалий вибір початкових умов заснований на суб’єктивному досвіді дослідника, іноді можна застосувати специфічні алгоритми пошуку приблизного розташування глобального екстремуму. Бувають ситуації, коли для коректного рішення оптимізаційної задачі необхідно сканувати усю область визначення ЦФ.

9.4. Особливості практичного рішення задач НП за допомогою надбудови «Пошук рішення» Microsoft Excel та економічної інтерпретації отриманих результатів

Оскільки задачі НП є узагальненням задач ЛП на випадок нелінійної ЦФ і (або) обмежень, структура підготовки вихідних даних для рішення задач НП за допомогою надбудови «Пошук рішення» Microsoft Excel значною мірою подібна задачам ЛП. Тут необхідно лише звернути увагу на коректне введення нелінійних залежностей, якими зв’язані КЗ в ЦФ і (або) обмеженнях. Більш цікавим є економічна інтерпретація отриманих результатів.

Графа «нормований градієнт» (в термінології Microsoft Excel 2010 – «приведений градієнт») розраховується для змінних, що не увійшли в оптимальне рішення. **Нормований градієнт** показує наскільки зміниться значення ЦФ при примусовому включенні в оптимальне рішення одиниці КЗ, що до нього не увійшла. Таким чином, нормований градієнт є аналогом нормованої вартості в ЛП.

В звіті про стійкість для кожного обмеження обчислений **множник Лагранжа**. Він, по-перше, вказує нам, чи є обмеження зв’язуючим. Для незв’язуючих обмежень він дорівнює нулю. По-друге, його значення показує наскільки зміниться значення ЦФ при зміні правої частини відповідного обмеження на одиницю. Таким чином, множник Лагранжа є аналогом тіньової ціни у ЛП.

Дана тема є спробою висвітлити базові теоретичні положення та практичні аспекти рішення задач НП. Однак НП є дуже великим розділом, що охоплює значне коло практичних задач оптимізації, які відрізняються за своїм економічним змістом, структурою оптимізаційної моделі та методами рішення. Тому в НП потрібно індивідуально підходити до рішення кожної конкретної задачі.

Запитання для самостійної перевірки знань:

1. В чому полягає необхідність застосування НП. Дати визначення НП.
2. Оптимізаційна модель задачі НП в загальній постановці. Складові оптимізаційної моделі задачі НП.
3. Співвідношення ЛП та НП.
4. Умовна та безумовна оптимізація.
5. Класичний метод диференційного числення при рішенні задач НП.
6. Метод множників Лагранжа.
7. Градієнтні методи рішення задач НП.
8. Дати визначення локальним та глобальним екстремумам функції.
9. Унімодальні та багатоекстремальні функції. Дати визначення та навести приклади.
10. Стаціонарні точки функції. Теорема Веєрштрасса.
11. Опукле програмування.
12. Багатоекстремальні задачі.
13. Особливості застосування градієнтних методів при вирішенні багато екстремальних задач НП.
14. Основи аналізу чутливості оптимального рішення задач НП.

Список рекомендованої літератури

1. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Таха, А. Хемди, 7-е изд.; пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
2. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
3. Зангвилл У. И. Нелинейное программирование. – М.: Сов. радио, 1973. – 273 с.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 324 с.
5. Економіко-математичне моделювання: навчальний посібник / За ред. О.Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
6. Лугінін О.Є. Економіко-математичне моделювання. Навчальний посібник для ВНЗ / О.Є. Лугінін, В.М. Фомішена – К. Знання, 2011. – 342 с.

ТЕМА 10. ДЕТЕРМІНОВАНА БЕЗДЕФІЦИТНА ЗАДАЧА УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

10.1. Оптимізація запасу продукту одного виду

Задачі управління запасами є одним з великих розділів економічних задач дослідження операцій. Правильне та своєчасне визначення оптимальної стратегії управління запасами, а також їх оптимального рівня дозволяє звільнити значні обігові кошти, заморожені у виді запасів при одночасному забезпеченні безперебійного функціонування підприємств виробничої сфери чи сфери обслуговування.

Введемо поняття **інтенсивності витрати запасу** $b(t)$, яку також називають попитом на продукт, що запасається. В залежності від того, приймається $b(t)$ детермінованою чи вірогіднісною, моделі управління запасами поділяють на детерміновані та стохастичні. В рамках даного розділу розглянемо детерміновану модель управління запасами. В статичній детермінованій бездефіцитній моделі управління запасами, котру в іноземній літературі називають класичною задачею економічного розміру замовлення [1], приймаються такі припущення:

- ✓ однаковий розмір n кожного з замовлень;
- ✓ недопустимість дефіциту на продукт, який запасається;
- ✓ миттєве поповнення запасу.

Загальне споживання продукту за певний час τ позначимо через *N*.

Припустимо, що інтенсивність витрат запасу визначається залежністю:

$$b(t) = \frac{N}{\tau}, \qquad (10.1)$$

Поповнення замовлення здійснюється миттєво партіями однакового розміру n, тому функція постачання $a(t)$ не є безперервною: $a(t) = 0$ при усіх t, окрім моментів постачання продукту, коли $a(t) = n$. Оскільки інтенсивність витрат запасу постійна $b(t) = const$. то вся партія буде використовуватись за період часу:

$$T = \frac{n}{b}, \qquad (10.2)$$

Графік залежності кількості запасів від часу показаний на рис. 10.1, при його побудові за початок відліку взятий момент постачання першої партії. Для зручності загальний час τ приймаємо кратним періоду T.

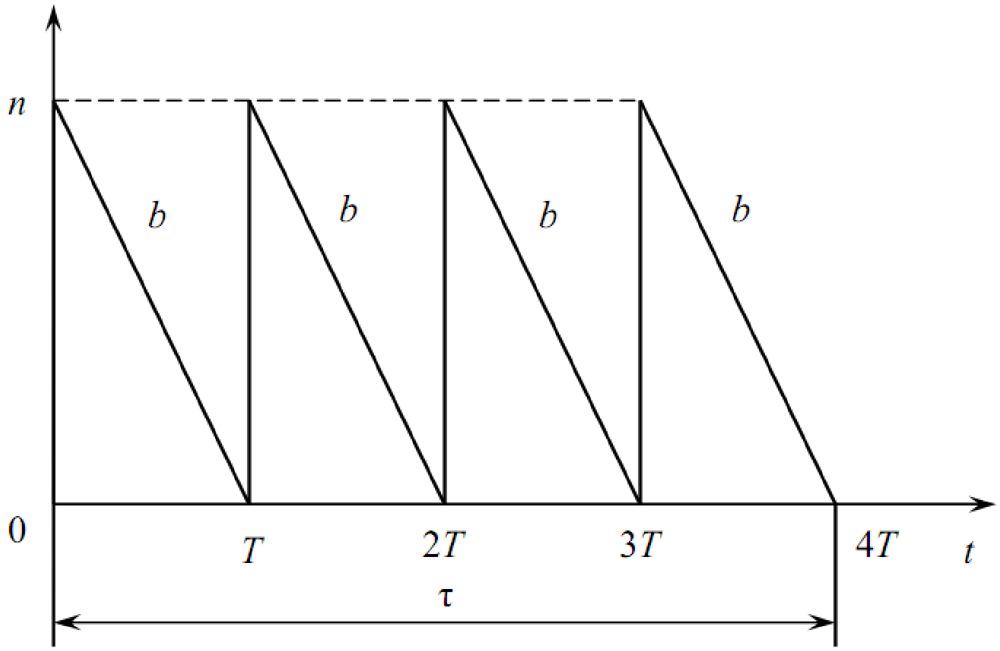


Рисунок 10.1 – Графік залежності кількості запасів від часу

Кількість партій, необхідних для забезпечення потреб протягом періоду часу τ дорівнює:

$$k = \frac{N}{n} = \frac{\tau}{T}, \tag{10.3}$$

Таким чином, наша задача управління запасами полягає у визначенні такого об'єму партії n, при котрому сумарні витрати $C(n)$ на створення $C_{ст.}(n)$ та зберігання $C_{зб.}(n)$ запасів були б мінімальними:

$$C(n) = C_{ст.}(n) + C_{зб.}(n) \to \min. \tag{10.4}$$

Очевидно, що тут витрати на створення та зберігання запасу, які мінімізуються є <u>критерієм оптимальності</u>, а об'єм партії n є КЗ.

Витрати на створення запасу однієї партії продукту позначимо через $c_{cm.}$, тоді загальні витрати на створення запасів протягом часу τ:

$$C_{cm.}(n) = c_{cm.} \cdot k = c_{cm.} \cdot \frac{N}{n} = c_{cm.} \cdot \frac{\tau}{T}. \qquad (10.5)$$

Під витратами $c_{cm.}$ на створення запасу продукту розуміють витрати на завантаження-розвантаження транспортних засобів, транспортування продукту, оформлення необхідних паперів, наприклад, митних.

Витрати на зберігання одиниці продукції за одиницю часу позначимо через $c_{cm.}$. Середній запас за проміжок часу $[0;T]$ дорівнює $\frac{n \cdot T}{2}$.

Таким чином, витрати на зберігання всього запасу, при лінійній за часом його витраті, дорівнюють витратам на зберігання середнього запасу:

$$C_{зб.}(n) = c_{зб.} \cdot \frac{n \cdot T}{2} \cdot k = c_{зб.} \cdot \frac{n \cdot T}{2} \cdot \frac{N}{n} = c_{зб.} \cdot \frac{T \cdot N}{2} = c_{зб.} \cdot \frac{n \cdot \tau}{2}, \qquad (10.6)$$

Враховуючи залежності (10.5) та (10.6) сумарні затрати (10.4) можуть визначатися залежністю, яка є ЦФ детермінованої бездефіцитної задачі управління запасами:

$$C(n) = c_{cm.} \cdot \frac{N}{n} + c_{зб.} \cdot \frac{n \cdot \tau}{2} \to \min. \qquad (10.7)$$

Графіки функції витрат на створення та зберігання запасів, а також загальних витрат представлені на рис. 10.2.

Як видно з рис. 9.2, залежність сумарних витрат від об'єму партії n є унімодальною функцією, причому її мінімум досягається при

$$C'(n) = -c_{cm.} \cdot \frac{N}{n^2} + c_{зб.} \cdot \frac{\tau}{2} = 0. \qquad (10.8)$$

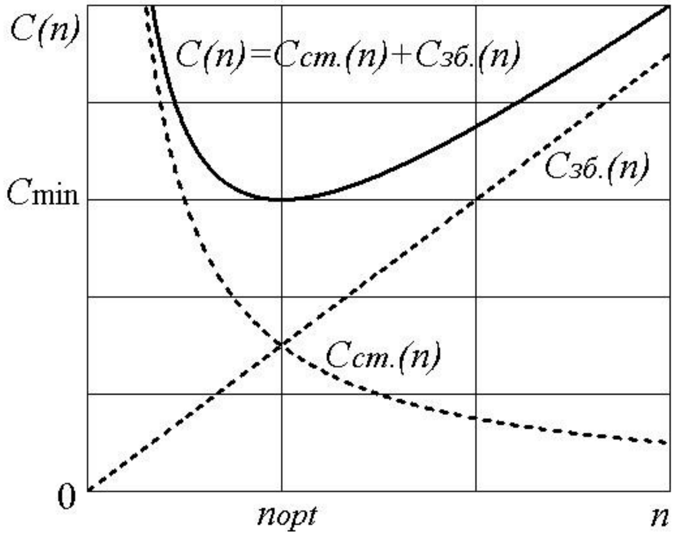


Рисунок 10.2 – Графік функції витрат на створення та зберігання запасів

Із рівняння (10.8) отримаємо:

$$n_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_{ст.} \cdot N}{c_{зб.} \cdot \tau}}, \tag{10.9}$$

Враховуючи (10.1) формулу (10.9) можна переписати у вигляді:

$$n_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_{ст.} \cdot b}{c_{зб.}}}, \tag{10.10}$$

Залежність (10.10) отримала назву формули Уілсона, який запропонував її в 1927 році. Отримання формули (10.10) було здійснено класичними методами диференціального числення. ЦФ є унімодальною з явно вираженим мінімумом, тобто вона допускає безумовну оптимізацію. Тим не менш в детермінованій бездефіцитній задачі управління запасами можуть бути присутні обмеження, що обумовлюється економічним сенсом конкретної задачі.

9.2. Узагальнення класичної детермінованої бездефіцитної задачі на випадок умовної оптимізації кількості запасів декількох видів продуктів

Припустимо, що перед нами стоїть задача мінімізації витрат на створення та зберігання не одного, а декількох видів продуктів $j = 1..m,$ протягом одного і того ж періоду часу τ. В такому випадку у нас буде m КЗ $(n_1,...,n_m)$, економічним змістом яких будуть кількості продуктів, що запасаються. Тоді ЦФ (10.7) можна записати у вигляді:

$$C(n_1,\ldots,n_m) = \sum_{j=1}^{m}\left(c_{cm.j}\cdot\frac{N_j}{n_j}+c_{зб.j.}\cdot\frac{n_j\cdot\tau}{2}\right)\to \min. \qquad (10.11)$$

Функція (10.11) є адитивною, тобто оптимізацію можна проводити за кожною КЗ n_j окремо за формулою Уілсона (10.10).

Адитивність – властивість величини, яка полягає у тому, що її значення, яке відповідає цілому об'єкту, дорівнює сумі значень величин, відповідаючих його частинам. Найбільш простим прикладом адитивної величини в економіці є гроші.

В процесі створення та зберігання запасів можуть виникати певні обмеження на значення КЗ – розмірів запасів кожного з продуктів.

При запасанні продукту необхідні не тільки витрати на його створення та зберігання, але і кошти на його придбання. Тому бюджет на купівлю продуктів в запас B може бути обмежений:

$$\sum_{i=1}^{m}(c_{од.i}\cdot n_i)\le B, \qquad (10.12)$$

де $c_{од.i}$ – ціна одиниці продукту, що запасається.

Запаси займають певний об’єм складу, який також може бути обмежений:

$$\sum_{i=1}^{m}(\nu_i\cdot n_i)\le W, \qquad (10.13)$$

де ν_i – об’єм, що займає одиниця продукції на складі;

W – корисний об’єм складу.

Обмеження можуть бути пов’язані з мінімально необхідною кількістю певного виду запасу M_i, яка може бути більшою за оптимальне його значення, отримане за формулою Уілсона $n_i \ge M_i$.

Також транспортування замовленої продукції може здійснюватись кількома транспортними засобами, які доцільно завантажувати повністю. Це може спричинити необхідність накладення обмежень дискретності на об’єми закупівель продукції в запас.

Накладання обмежень на значення n_i найімовірніше призведе до погіршення результату, порівняно з оптимізацією за формулою Уілсона. При умовній оптимізації, рішення можуть лежати не в стаціонарній точці функції (10.11), а на границі її області визначення. Також очевидно, що при наявності обмежень принцип адитивності для ЦФ (10.11) може не працювати. Отже умовну оптимізацію розмірів запасів доцільно проводити градієнтними методами чи методом множників Лагранжа.

Запитання для самостійної перевірки знань:

1. Здачі оптимального управління запасами, як важливий розділ дослідження операцій. Основні припущення бездефіцитної детермінованої задачі управління запасами.
2. КЗ та основні параметри бездефіцитної детермінованої задачі управління запасами. Їх взаємозв’язок.
3. Залежність кількості запасів від часу.
4. ЦФ бездефіцитної детермінованої задачі управління запасами.
5. Формула Уілсона. Порядок її отримання.
6. Узагальнення класичної детермінованої бездефіцитної задачі на випадок кількості запасів декількох видів продуктів.
7. Умовна та безумовна та умовна оптимізація в бездефіцитній детермінованій задачі управління запасами.

Список використаної літератури

1. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Таха, А. Хемди, 7-е изд.; пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
2. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
3. Кузьмичов А.І., Медведєв М.Г. Математичне програмування в Excel: Навч. посіб. – К. Вид-во Європ. Ун-ту, 2005. – 320 с.
4. Скворчевський О.Є., Попенко А.О., Неупокоєва А.О. Особливості оптимізації запасів підприємства засобами MathCAD за формулою Уілсона при додаткових обмеженнях // Моделювання та прогнозування економічних процесів: Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції. – К.: НТУУ «КПІ», 2010. – С. 46-47.

Зміст

Список використаних скорочень……………………………………………... 4
Вступ……………………………………………………………………………5
Тема 1. Концептуальні засади економіко-математичного моделювання….. 7
Тема 2. Побудова міжгалузевого балансу на основі моделі Лєонтьєва…….24
Тема 3. Основні визначення, поняття та теоретичні основи
математичного програмування……………………………………………….. 21
Тема 4. Лінійне програмування………………………………………………..25
Тема 5. Поняття двоїстості в лінійному програмуванні……………………..35
Тема 7. Транспортна задача…………………………………………………....49
Тема 8. Здачі про призначення……………………………………………….. 57
Тема 9. Основи нелінійного програмування…………………………………62
Тема 10. Детермінована бездефіцитна задача
управління запасами…………………………………………………………69

Навчальне видання

СКВОРЧЕВСЬКИЙ Олександр Євгенович

Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті. Текст лекцій

з курсу «Економіко-математичні методи і моделі»

для студентів спеціальностей 6.030601 – «Менеджмент», 6.030501 – «Економіка підприємства», 6.030509 – «Облік та аудит», 6.030507 – «Маркетинг», 6.030507 – «Інтелектуальна власність» очної, заочної та дистанційної форм навчання

План 2014 р., поз. ___

Підп. до друку ______. Формат 60х84 1/16. Папір офсет. Riso-друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. _____. Наклад 100 прим
Зам. № _____. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ “ХПІ”.61002, Харків, вул. Фрунзе, 21
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №3657 від 24.12.2009 р.

Друкарня НТУ “ХПІ”. 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.